

Cinemática de los sistemas indeformables

$M_{\epsilon}cFUNN_{\epsilon}T$

UPM



DFAII
ETSII, UPM

Resumen

Contenido

Página Inicial



Volver

Cerrar

Salir

Contenido

1	Posición de un sólido con un punto fijo	3
2	Rotaciones de Euler	9
3	Eje instantáneo y axoides	11
4	Movimientos de nutación nula	13
5	Movimiento de tres sistemas con un punto fijo	16
6	Teorema de Rutz en la cinemática esférica	18
7	Cinemática general del sólido	20



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 2 de 23

1. Posición de un sólido con un punto fijo

Cuando un sólido experimenta un movimiento plano, sólo se necesitan tres parámetros para determinar su posición. Cuando el sólido gira en torno a un eje fijo, sólo es necesario un parámetro para determinarla. Cuando se conoce la posición de un punto fijo del sólido, entonces sólo se necesitan tres parámetros para determinar su posición. Es inmediato reducir el problema de la determinación de la posición de un sólido con un punto fijo al de la determinación de la posición de una referencia tridimensional vinculada al sólido, pues conocida ésta, los puntos del sólido se ubican mediante sus coordenadas que son constantes. Se trata de determinar los tres vectores de una base ortonormal considerada móvil respecto a una referencia fija. En principio se tienen nueve parámetros (las componentes de los tres vectores móviles en la base fija), pero las condiciones debidas a la ortonormalidad de la base imponen seis restricciones más, a saber, que los tres vectores han de ser unitarios y que deben ser perpendiculares entre sí. Quedan, pues, tres únicos parámetros para determinar la posición de la base móvil respecto a la fija. Estos tres parámetros pueden elegirse de entre una gran variedad de ellos, pero los más frecuentes son los *ángulos de Euler*, que se procede a definir.

Sea una base fija ortonormal $\{\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$ y una móvil $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Se definen los siguientes elementos:

- línea de nodos: es el eje cuya recta soporte es la de la intersección entre los planos x_1y_1 y xy y cuyo sentido es el que hace que la terna de ejes nz_1z tenga orientación positiva. En términos analíticos la línea



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 3 de 23

de nodos viene definida por la fórmula

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{k}}{|\vec{k}_1 \times \vec{k}|}$$

- ángulo de precesión ($0 \leq \varphi < 2\pi$): es el azimut de la línea de nodos respecto a x_1 orientado por z_1 . Analíticamente se determina por sus razones trigonométricas

$$\cos \varphi = \vec{i}_1 \cdot \vec{n} \wedge \sin \varphi = \vec{j}_1 \cdot \vec{n}$$

- ángulo de nutación ($0 \leq \theta \leq \pi$): es el ángulo que forman los ejes z_1, z . Analíticamente se determina por su coseno:

$$\cos \theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}$$

- ángulo de rotación propia ($0 \leq \psi < 2\pi$): es el azimut de x respecto a la línea de nodos orientado por z . Analíticamente se determina por sus razones trigonométricas

$$\cos \psi = \vec{i} \cdot \vec{n} \wedge \sin \psi = -\vec{j} \cdot \vec{n}$$

Los ángulos de Euler (φ, θ, ψ) están definidos para todas las configuraciones, excepto para el caso en que los ejes z_1, z sean paralelos. Si este estado se mantiene durante intervalos extensos de tiempo, el sólido experimenta realmente un movimiento con un eje fijo, y sólo se necesita un



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

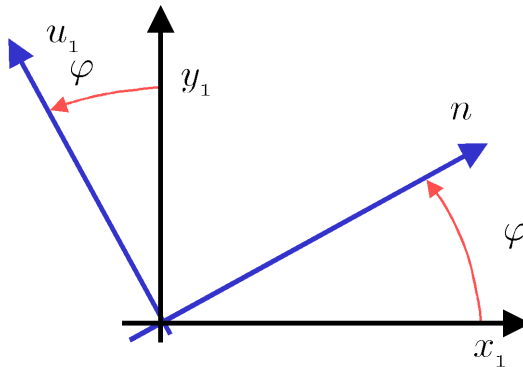
Salir

Página 4 de 23

parámetro para posicionarlo. Si el paralelismo es un hecho puntual, pueden definirse los ángulos de Euler por continuidad temporal.

Se va a proceder a continuación a construir la posición de la base móvil a partir de la fija y los tres ángulos de Euler, suponiendo que no se dan las condiciones de degeneración aludidas en el párrafo anterior. Este proceso se realizará mediante tres rotaciones sucesivas que irán transformando la terna $\{\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$ en la $\{\vec{n}, \vec{u}_1, \vec{k}_1\}$, $\{\vec{n}, \vec{u}, \vec{k}\}$ y la $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

- giro φ en torno a \vec{k}_1 : en este giro se obtiene la terna $\{\vec{n}, \vec{u}_1, \vec{k}_1\}$ a partir de la fija, como muestra la figura



según las ecuaciones

$$\begin{cases} \vec{n} = \cos \varphi \vec{i}_1 + \sin \varphi \vec{j}_1 \\ \vec{u}_1 = -\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{j}_1 \end{cases} \quad (1)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

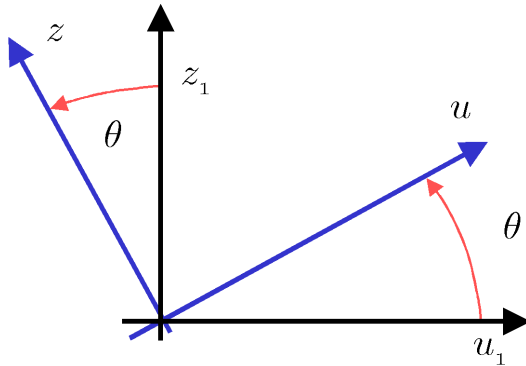
Salir

Página 5 de 23

o sus inversas

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \cos \varphi \vec{n} - \sin \varphi \vec{u}_1 \\ \vec{j}_1 = \sin \varphi \vec{n} + \cos \varphi \vec{u}_1 \end{cases} \quad (2)$$

2. giro θ en torno a \vec{n} : en este giro se obtiene la terna $\{\vec{n}, \vec{u}, \vec{k}\}$ a partir de la $\{\vec{n}, \vec{u}_1, \vec{k}_1\}$, como muestra la figura



según las ecuaciones

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos \theta \vec{u}_1 + \sin \theta \vec{k}_1 \\ \vec{k} = -\sin \theta \vec{u}_1 + \cos \theta \vec{k}_1 \end{cases} \quad (3)$$

o sus inversas

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \cos \theta \vec{u} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{k}_1 = \sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{k} \end{cases} \quad (4)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



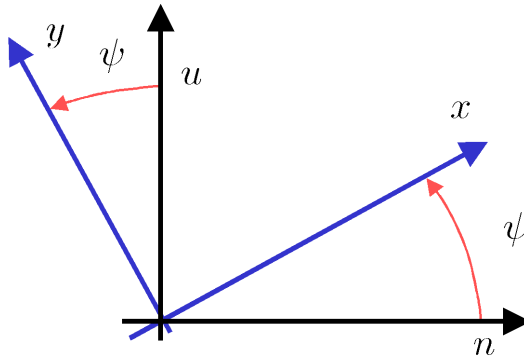
Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 6 de 23

3. giro ψ en torno a \vec{z} : en este giro se obtiene la terna $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a partir de la $\{\vec{n}, \vec{u}, \vec{k}\}$, como muestra la figura



según las ecuaciones

$$\begin{cases} \vec{i} = \cos \psi \vec{n} + \sin \psi \vec{u} \\ \vec{j} = -\sin \psi \vec{n} + \cos \psi \vec{u} \end{cases} \quad (5)$$

o sus inversas

$$\begin{cases} \vec{n} = \cos \psi \vec{i} - \sin \psi \vec{j} \\ \vec{u} = \sin \psi \vec{i} + \cos \psi \vec{j} \end{cases} \quad (6)$$

Las ecuaciones 1,3,5 permiten obtener los vectores de las nuevas ternas a partir de las antiguas encadenando, si es necesario, todas las expresiones.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 7 de 23

Así, por ejemplo, el vector \vec{k} puede obtenerse en la base fija a partir de **3**

$$\vec{k} = -\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{k}_1$$

e insertando **1**

$$\vec{k} = -\sin\theta(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1) + \cos\theta\vec{k}_1$$

$$\vec{k} = \sin\theta\sin\varphi\vec{i}_1 - \sin\theta\cos\varphi\vec{j}_1 + \cos\theta\vec{k}_1 \quad (7)$$

Igualmente, las ecuaciones **2,4,6** permiten obtener los vectores de las antiguas ternas a partir de las nuevas encadenando, si es necesario, todas las expresiones. Así, por ejemplo, el vector \vec{k}_1 , de **4**

$$\vec{k}_1 = \sin\theta\vec{u} + \cos\theta\vec{k}$$

y sustituyendo gracias a **6**, se tiene

$$\vec{k}_1 = \sin\theta(\sin\psi\vec{i} + \cos\psi\vec{j}) + \cos\theta\vec{k}$$

$$\vec{k}_1 = \sin\theta\sin\psi\vec{i} + \sin\theta\cos\psi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \quad (8)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 8 de 23

2. Rotaciones de Euler

Una vez determinada la posición del sólido con punto fijo mediante los ángulos de Euler, se va a expresar su rotación en función de estos ángulos. La rotaciones relativas de las bases intermedias son inmediatas:

$$\vec{\omega}_{nu_1k_1/i_1j_1k_1} = \dot{\varphi} \vec{k}_1$$

$$\vec{\omega}_{nuk/nu_1k_1} = \dot{\theta} \vec{n}$$

$$\vec{\omega}_{ijk/nuk} = \dot{\psi} \vec{k}$$

con lo que la rotación del sólido es

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ijk/nuk} + \vec{\omega}_{nuk/nu_1k_1} \vec{\omega}_{nu_1k_1/i_1j_1k_1}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\psi} \vec{k} \quad (9)$$

La base $\{\vec{n}, \vec{k}_1, \vec{k}\}$ se denomina base de Euler y las componentes de la rotación del sólido en dicha base, reciben el nombre de *rotaciones de Euler*, resultando que son las derivadas de los ángulos de Euler respecto al tiempo $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$.

Las rotaciones de Euler $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ reciben los nombres de *nutación*, *precesión* y *rotación propia* respectivamente.

En algunas ocasiones es necesario utilizar las componentes de rotación en la base móvil, lo que es inmediato teniendo en cuenta que (8)

$$\vec{k}_1 = \sin \theta \sin \psi \vec{i} + \sin \theta \cos \psi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 9 de 23

y que (6)

$$\vec{n} = \cos \psi \vec{i} - \sin \psi \vec{j}$$

ya que 9 queda

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}(\sin \theta \sin \psi \vec{i} + \sin \theta \cos \psi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) + \dot{\theta}(\cos \psi \vec{i} - \sin \psi \vec{j}) + \dot{\psi} \vec{k}$$

con las componentes

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases} \quad (10)$$

De la misma forma, se pueden obtener las componentes en la base fija

$$\begin{cases} \omega_{x1} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_{y1} = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_{z1} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (11)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 10 de 23

3. Eje instantáneo y axoides

En el caso de movimiento de un sólido rígido con un punto O fijo, el segundo invariante cinemático (el producto escalar de la rotación por la velocidad de cualquier punto) es, obviamente, nulo. La velocidad de un punto cualquiera obedece al campo de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

Siempre que la rotación no sea nula, existe un eje instantáneo de rotación cuyos puntos tienen velocidad nula y que pasa por el punto fijo O . Los axoides fijo y móvil son sendas superficies cónicas con vértice común O que ruedan sin deslizar entre sí a lo largo del eje instantáneo de rotación. Reciben el nombre de *conos de Poinsot*.

Supuesta conocida la evolución del sólido, es decir, conocidas las funciones del tiempo $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$, la posición del eje instantáneo de rotación viene dado en paramétricas y en la base móvil, según la fórmula 11

$$\begin{cases} x_1 = \lambda(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \\ y_1 = \lambda(-\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi) \\ z_1 = \lambda(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{cases}$$

ecuación paramétrica (parámetros λ, t) del cono de Poinsot fijo o ecuación paramétrica (parámetro λ) en función del tiempo del eje instantáneo de rotación. De igual forma, utilizando 10, se tiene en la base móvil

$$\begin{cases} x = \lambda(\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \\ y = \lambda(\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \\ z = \lambda(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{cases}$$



DFAII
M_ccFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 11 de 23

ecuación paramétrica (parámetros λ, t) del cono de Poinsot móvil. o ecuación paramétrica (parámetro λ) en función del tiempo del eje instantáneo de rotación.

Igual que en el movimiento plano, se puede definir en el esférico el concepto de conos conjugados. Si

$$\vec{r} = \lambda \vec{u}(\mu)$$

es el cono móvil y $T(t)$ la matriz de paso de la base móvil a la fija, entonces

$$\vec{r}_1 = \lambda T(t) \cdot \vec{u}(\mu)$$

representa la familia de superficies (parámetro t) cuya envolvente determina el cono conjugado fijo.

Al igual que sucede con el movimiento plano, no es necesario conocer las funciones $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ sino sólo la secuencia de posiciones, (p.e. $\theta(\varphi), \psi(\varphi)$), para determinar los conos de Poinsot, así como el cono conjugado de uno dado. Se omite el desarrollo matemático que el lector puede completar de forma similar a lo que se hizo en cinemática plana.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 12 de 23

4. Movimientos de nutación nula

Un tipo particular de movimiento de la cinemática esférica es el que se conoce como movimiento de nutación nula, precesión y rotación propia uniformes. En este caso, al ser la nutación nula, los terceros ejes fijo y móvil siempre forman el mismo ángulo $\theta = \theta_0$. La suma vectorial de las rotaciones propia y de precesión, que son constantes, constituyen una suma rígida para los sistemas $\{n, u, k\}$, $\{n, u_1, k_1\}$ que son solidarios. Los ángulos α, α_1 entre el eje instantáneo de rotación y los ejes z, z_1 son constantes, por lo que los conos de Poincot son de revolución en torno a los terceros ejes fijo y móvil. Estos conos ruedan exterior o interiormente (el fijo interior al móvil o viceversa) sin deslizar entre ellos. En la figura se representa el plano u_1, u, z_1, z sobre el que se debe realizar la suma de la rotación propia $\dot{\psi}$ según z y la precesión $\dot{\varphi}$ según z_1 . Según el resultado de esta suma (la rotación) pertenezca a un sector marcado con un 1, 2, 3, se tendrá una rodadura exterior, exterior del cono móvil sobre el fijo o interior del móvil dentro del fijo respectivamente.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido

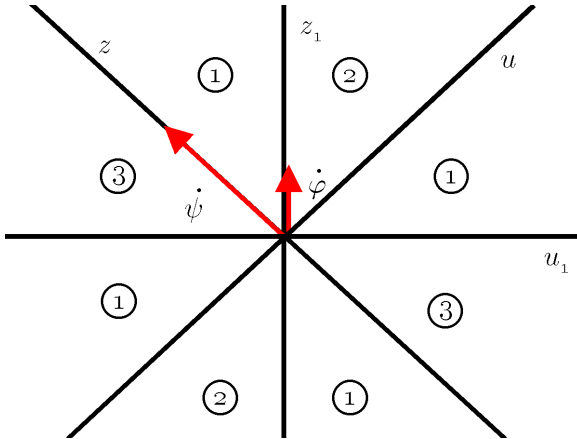


Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 13 de 23



El tercer eje móvil gira uniformemente en torno al fijo en un cono de revolución y el sólido gira a su vez uniformemente alrededor del tercer eje móvil. En la siguiente figura se representa el caso de una rodadura exterior.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido

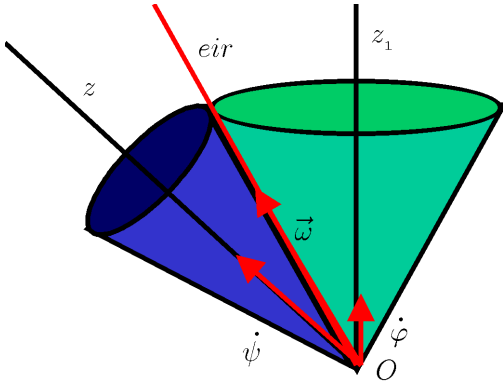


Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 14 de 23



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 15 de 23

5. Movimiento de tres sistemas con un punto fijo

Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ tres sistemas indeformables con un punto fijo común O , que evolucionan definiendo los movimientos esféricos relativos: $\kappa_2/\kappa_1, \kappa_1/\kappa_2, \kappa_3/\kappa_1, \kappa_3/\kappa_2, \kappa_2/\kappa_3$. Como ya se ha demostrado, la posición geométrica de los ejes instantáneos de los movimientos $\kappa_i/\kappa_j, \kappa_j/\kappa_i$ es la misma, con lo que se tiene tres posiciones geométricas únicamente.

Se procede a calcular la velocidad respecto a π_1 de un punto del eje instantáneo de rotación del movimiento de κ_3/κ_2 . Por una parte, al tratarse de un punto del sistema κ_3 se tiene

$$\vec{v} = \vec{\omega}_{31} \times \overrightarrow{OI_{23}}$$

por otra parte, se puede calcular su velocidad a partir de los campos de velocidades de $\kappa_2/\kappa_1, \kappa_3/\kappa_2$ utilizando las fórmulas de la cinemática relativa.

$$\vec{v} = \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{OI_{32}} + \vec{v}_a(\kappa_3, \kappa_2, I_{32})$$

donde el último sumando es nulo por ser la velocidad de los puntos del eje instantáneo de rotación del movimiento κ_3/κ_2 respecto a κ_2 . Queda, por lo tanto, que

$$\vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{OI_{32}} = \vec{\omega}_{31} \times \overrightarrow{OI_{23}}$$

es decir, la velocidad de un punto cualquiera del eur_{32} de un movimiento esférico respecto a cualquier otro sistema puede calcularse como si perteneciera al sistema κ_3 o al sistema κ_2 .



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 16 de 23

Además, la ecuación anterior indica que los vectores $\vec{31}$, $\vec{32}$, $\vec{21}$ son coplanarios, lo que permite enunciar el *teorema de los tres ejes*

Los ejes instantáneos de rotación de los movimientos relativos de tres sistemas que evolucionan con el mismo punto fijo son coplanarios.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 17 de 23

6. Teorema de Rutz en la cinemática esférica

En esta sección se presenta un teorema que permite generar conos conjugados. Sean tres sistemas $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ que evolucionan con un punto fijo común, definiendo los correspondientes movimientos relativos recíprocos. Si existe una generatriz d_3 de κ_3 que durante todo el movimiento se encuentra situada en el plano que contiene a los ejes instantáneos de los movimientos relativos de los tres sistemas, entonces las trayectorias de d_3 respecto a los sistemas κ_1, κ_2 son una pareja de conos conjugados. En efecto, las velocidades de los puntos de d_3 respecto a κ_1, κ_2 son paralelas (son tangentes al plano de los ejes) por lo que las trayectorias son conos tangentes. Este resultado, conocido como *teorema de Rutz* para la cinemática esférica, permite generar conos conjugados para cualquier movimiento de la siguiente forma.

Dado el movimiento de un sistema κ_2 respecto a otro κ_1 , puede elegirse un cono Γ_1 de κ_1 , sobre el que se hace rodar sin deslizar un plano π_3 de modo que siempre contenga al eje e_{21} . El eje instantáneo de rotación e_{32} del movimiento de π_3 respecto a κ_2 debe encontrarse sobre el plano π_3 , en virtud del teorema de los tres ejes; el cono de Poinsoot del sistema κ_2 de este movimiento es un cono Γ_2 de κ_2 . Sea un eje $d_3 \in \pi_3$. Las trayectorias de d_3 respecto a los sistemas κ_1, κ_2 son conos conjugados en virtud del teorema de Rutz. Estas trayectorias son las evolventes de Γ_1, Γ_2 , por lo que este método de generar conos conjugados recibe el nombre de método de las evolventes.

Por ejemplo, sea el movimiento esférico definido por los conos de revolución κ_1, κ_2 que ruedan sin deslizar y tienen sus ejes fijos respecto a un



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 18 de 23

sistema κ_0 . Se elige como cono Γ_1 un cono cóaxico con el cono κ_1 . Como el eje instantáneo e_{21} está siempre en el mismo sitio respecto a κ_0 , el plano π_3 siempre pasa por este eje y es tangente a Γ_1 , sobre el que rueda sin deslizar. La trayectoria de un eje cualquiera de δ_3 respecto a Γ_1 es una evolvente de cono. El cono de κ_2 al que es tangente π_3 es también un cono de revolución Γ_2 , de modo que la trayectoria de un eje cualquiera de π_3 respecto a κ_2 es otra evolvente de cono. Por lo tanto, las evolventes de cono de revolución constituyen una pareja de conos conjugados de este movimiento. Estas superficies constituyen los engranajes cónicos.

Otro método de generación de perfiles conjugados lo constituye el del cono auxiliar. Si se hace rodar un cono (cono auxiliar) sobre los de Poincaré de un movimiento esférico, haciendo coincidir los ejes instantáneos definidos, las trayectorias de un eje d_3 del sistema indeformable ligado al cono auxiliar respecto a los sistemas fijo y móvil son siempre tangentes ya que las velocidades de los puntos de d_3 respecto a estos sistemas son perpendiculares a la recta que une dicho punto con el eje y por lo tanto son tangentes.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 19 de 23

7. Cinemática general del sólido

En esta sección se retoma el movimiento más general de un sólido rígido, utilizando las técnicas de posicionamiento desarrolladas en la cinemática del sólido rígido con un punto fijo. En efecto, un sistema indeformable puede posicionarse si se determina la ubicación de una referencia móvil $\{\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ respecto a una referencia fija $\{O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$. Esto se consigue posicionando el origen O y la orientación de la referencia móvil respecto a la fija. El primer problema corresponde a la determinación de la posición de un punto respecto a un sistema, que se resuelve dando, por ejemplo, sus tres coordenadas ξ, η, ζ en la referencia fija. El segundo problema equivale a posicionar la terna de vectores móvil $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respecto a la $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, que se resuelve, según se ha visto anteriormente, con los tres ángulos de Euler φ, θ, ψ .

Por lo tanto, se necesitan seis parámetros para posicionar un sistema indeformable respecto a otro. Por ejemplo

$$(\xi, \eta, \zeta, \varphi, \theta, \psi)$$

Conociendo su evolución en el tiempo $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t), \varphi(t), \theta(t), \psi(t))$, se tiene determinado el movimiento. El campo de velocidades

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} = \dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1 + \dot{\zeta} \vec{k}_1 + (\dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\psi} \vec{k}) \times (\xi \vec{i}_1 + \eta \vec{j}_1 + \zeta \vec{k}_1)$$

puede expresarse en la referencia fija

$$\vec{v}_P = \dot{\xi} \vec{i}_1 + \dot{\eta} \vec{j}_1 + \dot{\zeta} \vec{k}_1 + (\omega_{x1} \vec{i}_1 + \omega_{y1} \vec{j}_1 + \omega_{z1} \vec{k}_1) \times ((x_1 - \xi) \vec{i}_1 + (y_1 - \eta) \vec{j}_1 + (z_1 - \zeta) \vec{k}_1)$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 20 de 23

donde las componentes de la rotación en la base fija se han encontrado en la sección anterior.

El axoide fijo viene determinado por la ecuación paramétrica

$$\vec{r}_1(t, \lambda) = \vec{O}_1\vec{O} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}$$

que proyectada sobre los ejes fijos define el axoide fijo. El axoide móvil se determina por la ecuación

$$\vec{r}(t, \lambda) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}$$

proyectada sobre los ejes móviles.

Envolventes e involutas

Dada una familia de curvas planas dependientes de un parámetro u

$$f(x, y, u) = 0$$

Se desea encontrar la curva a la cual todas son tangentes. Sea $P(u)$ el punto de tangencia. derivada del vector de posición de P respecto a u

$$\frac{dx}{du} \vec{i} + \frac{dy}{du} \vec{j}$$

debe ser tangente a la curva $f(x, y, u_0) = 0$ es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} = 0$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 21 de 23

además, P siempre está en alguna curva de la familia, por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} + \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

que junto a

$$f(x, y, u) = 0$$

forman un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y, u) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

cuya solución $x(u), y(u)$ determina la curva buscada. Ésta se denomina envolvente de la familia, mientras que esta última se denomina involuta de su curva envolvente.

Cuando se parte de un conjunto de superficies $f(x, y, x, u) = 0$, un tratamiento idéntico al desarrollado más arriba llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y, z, u) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

cuya solución determina una superficie $g(x, y, z) = 0$. Más aún, para cada valor de u , es decir para la superficie u de la familia f , las dos ecuaciones



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 22 de 23

del sistema determinan una curva Γ , que es la curva de tangencia entre las dos superficies. Por consiguiente la tangencia entre cada superficie y la envolvente se verifica a lo largo de una curva. El conjunto de las curvas de tangencia de cada valor de u , cuando se consideran todos sus posibles valores determina la superficie envolvente.



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 23 de 23