Cinética del sólido rígido

$\mathrm{M}_{\epsilon}\mathrm{cFunN}_{\epsilon}\mathrm{T}$

UPM

DFAII

ETSII, UPM

Contenido

DFAII

M$_\epsilon$cFunN$_\epsilon$t

1. Introducción

Al aplicar las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido es necesario disponer de las expresiones de las magnitudes mecánicas fundamentales (cantidad de movimiento, momento cinético, energía cinética). Por ello, en este capítilo se calcularán distintas expresiones para la cantidad de movimiento, el momento cinético y la energía cinética. Estas expresiones dependerán de otras variables propias del sólido, como son:

- las de su geometría de masas

  concretamente, la posición de su centro de masas, sus momentos estáticos y de inercia, así como su campo de tensores de inercia.

- las de su cinemática

  la cual, como se sabe, está determinada conociendo la velocidad de uno de sus puntos (generalmente se da la del centro de masas) y la rotación del sólido. Ambas variables presuponen un sistema de referencia que, arbitrariamente, se tome como fijo. En este capítulo se estudian las magnitudes cinéticas respecto a este sistema.

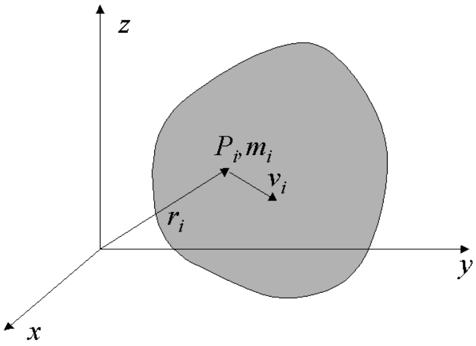

Figure 1: Sólido rígido

2. Cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento de un sistema de puntos materiales es la suma de las cantidades de movimiento de cada uno de sus puntos (**??**), es decir:

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i \quad \text{o bien, en sistemas continuos,} \quad \overrightarrow{p} = \int \overrightarrow{v}\, dm$$

Si se elige un punto fijo O como origen, y se llama $\overrightarrow{r}_i$ al vector $\overrightarrow{OP}_i$que posiciona el punto P_i de masa m_i, entonces:

$$\overrightarrow{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OP}_i}{dt} = \dot{\overrightarrow{r}}_i$$

Sea C el centro de masas del sistema. Puede expresarse $\overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}_i$, por lo que:

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}_i)}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overrightarrow{CP}_i}{dt} =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} m_i) \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i d\overrightarrow{CP}_i}{dt} =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} m_i) \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} + \frac{d\,(\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CP}_i)}{dt} = m\overrightarrow{v}_c + \frac{d\,\overrightarrow{0}}{dt}$$

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}_c \tag{1}$$

En el caso de sistemas continuos puede aplicarse un desarrollo análogo:

$$\overrightarrow{p} = \int \frac{d(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP})}{dt}\, dm =$$

$$= \int \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\,dm + \int \frac{d\overrightarrow{CP}}{dt}\,dm =$$

$$= (\int dm)\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} + \int \frac{m_i d\overrightarrow{CP}}{dt}\,dm =$$

$$= (\int dm)\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} + \frac{d\,(\int \overrightarrow{CP}\,dm)}{dt} = m\overrightarrow{v}_c + \frac{d\,\overrightarrow{0}}{dt}$$

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}_c$$

lo que constituye el siguiente

Teorema 1 (del centro de masas) *La cantidad de movimiento de un sólido rígido* [1] *es igual a la de un punto material cuya masa fuese la del sólido y se moviese con la velocidad del centro de masas.*

En el caso de sólidos que se muevan con un punto O fijo (lo que incluye el caso de movimiento con un eje fijo) el teorema anterior permite escribir:

$$\overrightarrow{p} = m\,\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{OC}$$

donde $\overrightarrow{\omega}$ es la rotación del sólido.

En la dinámica del sólido, como se verá más adelante, es conveniente fijarse en sistemas de referencia respecto a los cuales el centro de masas sea un punto fijo. De ahora en adelante se denotarán con un asterisco *

[1] este resultado puede generalizarse a un sistema material cualquiera, pues en su deducción no se ha utilizado la hipótesis de sólido rígido

las magnitudes evaluadas respecto a un sistema de éstos. La cantidad de movimiento de un sólido respecto a un sistema que conga a su centro de masas centro de masas, que se denotará $\overrightarrow{p}^*$ es nula. En efecto, para un sistema continuo [2]:

$$\overrightarrow{p}^* = \int \overrightarrow{v}^* \, dm = \int (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}_c) \, dm =$$

$$= \int \overrightarrow{v} \, dm - \int \overrightarrow{v}_c \, dm = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{v}_c \left(\int dm\right) = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}$$

$$\overrightarrow{p}^* = \overrightarrow{0} \tag{2}$$

lo que demuestra el resultado.

[2]de ahora en adelante sólo se demostrarán los resultados para sistemas continuos. La demostración para los discretos es directamente transcriptible cambiando la integración definida para toda la masa por la suma extendida a todos los puntos.

3. Momento cinético

La segunda magnitud fundamental cuya expresión es conveniente conocer es el momento cinético. Sea un sólido rígido cuyo centro de masas es C y que se mueve con una rotación $\overrightarrow{\omega}$ respecto a un sistema que se tome como fijo. El momento cinético$\overrightarrow{L_o}$ respecto a un punto O cualquiera es:

$$\overrightarrow{L_o} = \int \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{v}_P \, dm$$

llamando $\overrightarrow{r}$ al vector $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{v_o}$ a la velocidad del punto delsólido que se encuentra sobre O, se tiene:

$$\overrightarrow{L_o} = \int \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{v_o} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) \, dm =$$

$$= \int \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v_o} \, dm + \int \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) \, dm =$$

$$= (\int \overrightarrow{r} \, dm) \times \overrightarrow{v_o} + \int \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) \, dm =$$

$$= m \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_o} + \int \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) \, dm =$$

$$= (\int \overrightarrow{r} \, dm) \times \overrightarrow{v_o} + \int (nor(\overrightarrow{r})\omega - (\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\omega})\overrightarrow{r}) \, dm$$

Sea { O,x,y,z } un sistema de referencia ortonormal con origen en O. Entonces:

$$\overrightarrow{r} = x \overrightarrow{\imath} + y \overrightarrow{\jmath} + z \overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{\omega} = \omega_x \overrightarrow{\imath} + \omega_y \overrightarrow{\jmath} + \omega_z \overrightarrow{k}$$

DFAII
$M_\epsilon cFunN_\epsilon t$
Título
Contenido
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Volver Atrás
Cerrar
Salir
Página 8 de 16

y sustituyendo

$$\overrightarrow{L_o} = m\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_o} +$$

$$\int dm(x^2+y^2+z^2)(\omega_x \overrightarrow{\imath} + \omega_y \overrightarrow{\jmath} + \omega_z \overrightarrow{k}) -$$

$$-(x^2\omega_x + xy\omega_y + zx\omega_z)\overrightarrow{\imath} -$$

$$-(xy\omega_x + y^2\omega_y + zy\omega_z)\overrightarrow{\jmath} -$$

$$-(zx\omega_x + yz\omega_y + z^2\omega_z)\overrightarrow{k})$$

$$\overrightarrow{L_o} = m\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_o} +$$

$$\int (((y^2+z^2)\overrightarrow{\imath} - xy\overrightarrow{\jmath} - zx\overrightarrow{k})\omega_x +$$

$$+(-xy\overrightarrow{\imath} + (z^2+x^2)\overrightarrow{\jmath} - yx\overrightarrow{k})\omega_y +$$

$$(-zx\overrightarrow{\imath} - yz\overrightarrow{\jmath} + (z^2+x^2)\overrightarrow{k})\omega_z)\, dm$$

es decir

$$\overrightarrow{L_o} = m\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_o} +$$

$$\int ((y^2+z^2)\overrightarrow{\imath} - xy\overrightarrow{\jmath} - zx\overrightarrow{k})\, dm\, \omega_x +$$

$$\int (-xy\overrightarrow{\imath} + (z^2+x^2)\overrightarrow{\jmath} - yx\overrightarrow{k})\, dm\, \omega_y +$$

$$\int (-zx\overrightarrow{\imath} - yz\overrightarrow{\jmath} + (z^2+x^2)\overrightarrow{k})\, dm\, \omega_z$$

o, escribiendo el segundo término como el producto de $\overrightarrow{\omega}$ por el tensor de inercia $\mathbf{I_o}$ que el sólido define en O,

$$\overrightarrow{L_o} = \overrightarrow{r_c} \times (m\overrightarrow{v_o}) + \mathbf{I_o} \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{3}$$

es decir

El momento cinético de un sólido respecto a un punto O es la suma del momento cinético que tendría un punto material situado sobre el centro de masas que se moviese con la velocidad de arrastre del sólido en O, más el producto del tensor de inercia del sólido en O por el vector rotación.

especialmente importante es el caso de un sólido que se mueva con un punto O (o un ejeque lo contenga) fijo. El momento cinético respecto al punto O es

$$\overrightarrow{L_o} = \mathbf{I_o} \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{4}$$

expresión que es aplicable en un gran número de problemas. También es útil considerar el cálculo del momento cinético $\overrightarrow{L_c}$ respecto al centro de masas:

$$\overrightarrow{L_c} = \mathbf{I_c} \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{5}$$

ecuación que es aplicable aunque el centro de masas no tenga velocidad nula.

Es importante hacer ver que el momento cinético se define *respecto a un punto y respecto a un sistema.* En efecto, éste último es necesario para definir las velocidades y por tanto las cantidades de movimiento cuyos momentos se integran. Frecuentemente se elude la referencia al sistema respecto al cual se computan las velocidades, pues éste suele estar implícitamente definido. Cabe destacar que las expresiones obtenidas para las magnitudes cinéticas de un sólido que se mueve respecto a un sistema considerado como fijo son válidas sea cual sea el sistema que se considere como tal. Si se considera el momento cinético respecto al centro de masas y respecto a un sistema cualquiera que contenga al centro de masas y que tenga un movimiento de translación respecto al primero, utilizando la ecuación anterior, se tiene la siguiente propiedad

Si dos sistemas tienen un movimiento relativo de translación, el momento cinético de un sólido respecto al centro de masas y respecto a cada uno de los dos sistemas anteriores es el mismo.

Es interesante evaluar el momento cinético apoyándose en el centro de masas. Si como se ha hecho en la sección anterior se escribe $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$, y se llama $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{CP}$, se tiene:

$$\overrightarrow{L_o} = \int (\overrightarrow{r_c} + \overrightarrow{r'}) \times (\overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'})\, dm =$$

$$= \int \overrightarrow{r'} \times \overrightarrow{v_c}\, dm + \int \overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_c}\, dm + \int \overrightarrow{r'} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'})\, dm =$$

$$(\int \overrightarrow{r'}\, dm) \times \overrightarrow{v_c} + (\int dm)\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_c} + \int \overrightarrow{r'} \times (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'})\, dm =$$

La primera integral es nula y la tercera ya ha sido evaluada resultando:

$$\overrightarrow{L_o} = m\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_c} + \mathbf{I_c} \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{6}$$

lo que constituye el

Teorema 2 *de Könnig (I) el momento cinético respecto a un punto cualquiera O es igual a la suma del momento cinético que tendría un punto material con la masa del sólido que se moviese sobre el centro de masas, más el momento cinético respecto al centro de masas.*

que también se escribe

$$\overrightarrow{L_o} = m\overrightarrow{r_c} \times \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{L_c} \tag{7}$$

Finalmente se deduce la relación del momento cinético de un sólido respecto a dos puntosO_1 , O_2. Utilizando la ecuación 7

$$\overrightarrow{L_o1} = m\overrightarrow{O_1C} \times \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{L_c}$$

$$\overrightarrow{L_o2} = m\overrightarrow{O_2C} \times \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{L_c}$$

y restando

$$\overrightarrow{L_o2} - \overrightarrow{L_o1} = m\overrightarrow{O_2O_1} \times \overrightarrow{v_c}$$

o, lo que es equivalente

$$\overrightarrow{L_o2} = \overrightarrow{L_o1} + \overrightarrow{O_2O_1} \times \overrightarrow{p} \tag{8}$$

4. Energía cinética

La última magnitud mecánica fundamental que se estudia es la energía cinética. Para sistemas continuos, la energía cinética es

$$\mathcal{E}_c = \int (\frac{1}{2} nor(\overrightarrow{v}))\, dm$$

con la notación establecida en la sección anterior y tomando un punto cualquiera O paraexpresar el campo de velocidades, tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_o} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, se tiene

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \int nor(\overrightarrow{v_o} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})\, dm =$$

$$= \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \int (nor(\overrightarrow{v_o}) + 2\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) + nor(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})\, dm =$$

$$= \frac{1}{2} nor(\overrightarrow{v_o} \int dm + 2\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \int \overrightarrow{r}\, dm) + \int nor(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})\, dm =$$

$$= \frac{1}{2} m nor(\overrightarrow{v_o} + 2m\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_c}) + \int nor(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r})\, dm =$$

desarrollando en una base cartesiana { O,x,y,z }

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{\omega} = \omega_x\,\overrightarrow{\imath} + \omega_y\,\overrightarrow{\jmath} + \omega_z\,\overrightarrow{k}$$

DFAII
M$_\epsilon$cFunN$_\epsilon$t
Título
Contenido
◄◄ ►►
◄ ►
Volver Atrás
Cerrar
Salir
Página 13 de 16

si se expresa

$$nor(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}) = nor(\overrightarrow{\omega})nor(\overrightarrow{r}) - (\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{r})^2$$

queda

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mnor(\overrightarrow{v_o} + 2m\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_c}) + \frac{1}{2}\int nor(\overrightarrow{\omega})nor(\overrightarrow{r'}) - (\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{r'})^2\, dm)$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mnor(\overrightarrow{v_o} + 2m\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_c}) + \frac{1}{2}\int$$

$$(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x^2 + y^2 + z^2) -$$

$$-(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)^2\, dm)$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mnor(\overrightarrow{v_o} + 2m\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_c}) +$$

$$+\frac{1}{2}((\int (y^2 + z^2)\, dm)\omega_x^2 + (\int (z^2 + x^2)\, dm)\omega_y^2 + (\int (x^2 + y^2)\, dm)\omega_z^2)$$

$$-(\int xy\, dm)\omega_x\omega_y - (\int zx\, dm)\omega_z\omega_x - (\int yz\, dm)\omega_y\omega_z$$

que puede escribirse, con la ayuda del tensor de inercia de O

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mnor(\overrightarrow{v_o}) + 2m\overrightarrow{v_o} \cdot (\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r_c}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{I_o} \cdot \overrightarrow{\omega} \qquad (9)$$

si se toma $O \equiv C$ entonces $\overrightarrow{r_c} = \overrightarrow{0}$ y se tiene

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mnor(\overrightarrow{v_c}) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{I_c} \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{10}$$

lo que se refleja en el siguiente

Teorema 3 *de Könnig (II) la energía cinética respecto a un sistema de un sólido rígido es la suma de la que tendría un punto material que tuviera la masa del sólido y se moviese sobre el centro de masas, más la que tiene el sólido respecto a un sistema en movimiento de traslación respecto al anterior y que tenga al centro de masas como un punto fijo.*

Otra importante consecuencia de la ecuación 9 es la expresión para el cálculo de la energía cinética de un sólido con un punto (o un eje) fijo. En este caso $\overrightarrow{v_o} = \overrightarrow{0}$ con lo que:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{I_o} \cdot \overrightarrow{\omega} \tag{11}$$

5. Resumen

Con objeto de recoger los resultados más importantes de las secciones anteriores, se suministra el siguiente cuadro-resumen.

$$
\begin{cases}
\text{cantidad de movimiento } \overrightarrow{p} \begin{cases} \text{en general } \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}_c \\ . \\ \text{si } \overrightarrow{v}_o = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{OC} \end{cases} \\
. \\
\text{momento cinético } \overrightarrow{L}_o \begin{cases} \text{en general } \overrightarrow{L}_o = m\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{v}_c + \mathbf{I_c} \cdot \overrightarrow{\omega} \\ . \\ \text{si } \overrightarrow{v}_o = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{L}_o = \mathbf{I_o} \cdot \overrightarrow{\omega} \end{cases} \\
\text{energía cinética } \mathcal{E}_c \begin{cases} \text{en general } \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mnor\overrightarrow{v}_c + \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{I_c} \cdot \overrightarrow{\omega} \\ . \\ \text{si } \overrightarrow{v}_o = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega} \cdot \mathbf{I_o} \cdot \overrightarrow{\omega} \end{cases}
\end{cases}
$$