

Dinámica del sólido rígido

$M_{\epsilon}cFUNN_{\epsilon}T$

UPM



DFAII
ETSII, UPM

Resumen

Contenido

Página Inicial



Volver

Cerrar

Salir

Contenido

| | | |
|---|-------------------------------|----|
| 1 | Introducción | 3 |
| 2 | Cantidad de movimiento | 6 |
| 3 | Momento cinético | 8 |
| 4 | Ligaduras en un sólido rígido | 16 |



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 2 de 28

1. Introducción

La dinámica del sólido rígido estudia el movimiento que adquiere un sólido cuando sobre él actúa un sistema de fuerzas dado. Es decir, la dinámica establece las relaciones entre la cinemática de un sistema y el sistema de fuerzas que actúa sobre el mismo. Esta relación está determinada por la geometría de masas del sólido, la cual, mediante las ecuaciones estudiadas en la sección anterior, determina la relación entre sus magnitudes dinámicas fundamentales y su cinemática. Estas relaciones se representan en el siguiente esquema: Un sólido rígido puede considerarse como un conjunto de puntos materiales unidos por ligaduras rígidas. Para aplicar las ecuaciones de la dinámica del punto a l sólido es necesario conocer el carácter de las fuerzas que mantienen esta ligadura, ya que, en caso contrario, sería imposible plantear las ecuaciones. En Mecánica se admite la siguiente hipótesis¹:

La fuerza que ejerce un punto P_i sobre un punto P_j de un sólido rígido es colineal con el vector $\overrightarrow{P_i P_j}$.

Por lo tanto, al unir la hipótesis anterior con el principio de acción y reacción, se deduce que las fuerzas interiores de un sólido están constituidas por parejas de vectores de igual módulo y dirección y sentidos opuestos situados sobre la misma línea de acción. Es decir, el sistema de fuerzas interiores, considerado como un sistema de vectores deslizantes, es un sistema

¹ el modelo de sólido perfectamente rígido no implica la hipótesis que se introduce. Realmente dicho modelo sería compatible con otras hipótesis alternativas. El estudio del sólido elástico, que constituye un refinamiento del rígido prescinde de ella y la sustituye con un modelo más complejo de sólido en el cual deja de ser cierta



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 3 de 28

nulo.

La ecuación fundamental de la Dinámica $\vec{F} = m \vec{a}$ era suficiente para describir el comportamiento de un punto material. En efecto, éste posee, en general, tres grados de libertad lo cual se traduce en la existencia de tres incógnitas cuya evolución se necesita determinar para conocer el movimiento. En los casos de punto material ligado, el número de parámetros que era necesario conocer para determinar el movimiento se reducía en el mismo número en que aumentaban unas nuevas incógnitas que a su vez definían las fuerzas de reacción. Es decir, la segunda ley de Newton era toda la dinámica necesaria para el punto material junto con la hipótesis sobre las fuerzas interiores anteriormente explicitada.

Un sólido rígido tiene, en general, seis grados de libertad. Por ello la situación es un poco más complicada. Cabe adelantar que la hipótesis anterior complementa la segunda ley de Newton para proporcionar las ecuaciones que determinan el comportamiento dinámico de un sólido. Estas son, además de la segunda ley de Newton, las tres ecuaciones de Euler, que, en un número total de seis, determinarán la evolución del movimiento de seis grados de libertad del sólido rígido.

En lo que sigue, mientras no se explicita lo contrario, se supondrá que las magnitudes cinéticas y cinemáticas lo son referidas a un sistema inercial. Un sistema no inercial especial es el *sistema centro de masas*. Si bien, como ya se sabe, las leyes fundamentales de la mecánica en general no se cumplen ² en sistemas no inerciales, algunas de ellas toman una forma especialmente sencilla y por lo tanto útil en este sistema. Por ello se incluye

²excepto si se consideran fuerzas ficticias (las de inercia) sumadas a las fuerzas reales



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 4 de 28

la siguiente:

Definición 1 (Sistema centro de masas) *de un sólido rígido es el sistema cuya rotación es permanentemente nula y que se traslada con la velocidad del centro de masas de dicho sólido.*

A continuación se procede a la presentación de las ecuaciones fundamentales de la Dinámica del sólido rígido, deducidas de las ecuaciones de la Dinámica del punto material.



DFAII
 $M_e c F u n N_e t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 5 de 28

2. Cantidad de movimiento

Según se ha visto para un punto material P de masa m que se mueve respecto a un sistema inercial σ bajo la acción de la fuerza \vec{f} , la segunda ley de Newton expresa:

$$m \vec{a} = \vec{f}$$

si se supone el sólido constituido por un conjunto discreto³ puntos materiales P_i de masa m_i , llamando \vec{p}_i a la cantidad de movimiento de P_i , \vec{f}_i a la fuerza externa que actúa sobre P_i y \vec{f}_{ij} a la fuerza que P_j realiza sobre P_i , se tiene

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{f}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij}$$

sumando para todos los puntos P_i

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij}$$

el doble sumatorio se anula pues las fuerzas interiores del sólido se anulan dos a dos, según se ha visto anteriormente. La suma $\sum_{i=1}^n \vec{f}_i$ es la resultante \vec{f} de las fuerzas exteriores que se ejercen sobre todos los puntos

³ esta suposición hace más clara la demostración que es transcribible para conjuntos continuos.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 6 de 28

del sólido y $\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i$ representa la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento \vec{p} del sólido. Queda pues

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad (1)$$

lo que constituye el

Teorema 1 (de la cantidad de movimiento) *La derivada temporal de la cantidad de movimiento de un sólido rígido respecto a un sistema inercial es igual a la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre el sólido.*

Aplicando el teorema del centro de masas, queda

$$m \dot{\vec{v}}_c = \vec{F} \quad (2)$$

Es decir,

el centro de masas de un sólido rígido se mueve como si se tratase de un punto material sometido a la resultante de todas las fuerzas exteriores.



DFAII
M_ceFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 7 de 28

3. Momento cinético

En la sección anterior se ha obtenido una ecuación vectorial que se traduce en tres ecuaciones escalares, las cuales han de completarse para la determinación del movimiento del sólido, que tiene, en general, seis grados de libertad. Las tres ecuaciones restantes provendrán de la aplicación del teorema del momento cinético. Se tomará un punto cualquiera O , que no tendrá por qué suponerse inmóvil, y se llamará \vec{r}_i al vector \overrightarrow{OP}_i . Partiendo del momento cinético respecto a O :

$$\vec{L}_i = \overrightarrow{OP}_i \times \vec{p}_i$$

derivando

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_i}{dt} &= \frac{d\overrightarrow{OP}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \overrightarrow{OP}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \\ \frac{d\vec{L}_i}{dt} &= (\vec{v}_i - \vec{v}_o) \times \vec{p}_i + \overrightarrow{OP}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \end{aligned}$$

con las convenciones del apartado anterior

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{v}_i \times \vec{p}_i - \vec{v}_o \times \vec{p}_i + \overrightarrow{OP}_i \times \left(\vec{f}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right)$$

sumando para todos los puntos

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \times \vec{p}_i - \sum_{i=1}^n \vec{v}_o \times \vec{p}_i + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP}_i \times \left(\vec{f}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij} \right)$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 8 de 28

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' \times \vec{v}_i' - \vec{v}_o' \times \sum_{i=1}^n \vec{p}_i' + \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \times \vec{f}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{f}_{ij}$$

el primer y último sumando son nulos. El último representa el momento de todas las fuerzas interiores del sólido, las cuales, como ya se ha visto, se agrupan en parejas de resultante y momento nulos. El tercer sumando representa el momento \vec{M}_o de las fuerzas exteriores respecto al punto O , con lo que puede escribirse:

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = -\vec{v}_o' \times \vec{p}' + \vec{M}_o \quad (3)$$

si el punto O está quieto la expresión anterior se simplifica

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o \quad (4)$$

la simplificación anterior también puede darse si se toma el momento respecto a un punto que se mueva paralelamente al centro de masas o si es el propio centro de masas:

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c \quad (5)$$

Como ya se ha visto en el capítulo anterior, el momento cinético respecto al centro de masas de un sólido es el mismo respecto a todos los sistemas



DFAII
M_cFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 9 de 28

que tengan entre sí un movimiento de traslación. En particular el momento cinético respecto a C es el mismo respecto a un sistema de referencia inercial que respecto al sistema centro de masas el cual, como se ha visto, no es inercial. Además, la derivada de un vector respecto a dos sistemas en traslación relativa también es la misma, por lo que puede describirse la dinámica respecto al sistema centro de masas de la siguiente forma:

La dinámica del sólido rígido respecto al sistema centro de masas corresponde al movimiento de un sólido sometido a un sistema de fuerzas de resultante nula y momento respecto al centro de masas igual al momento del conjunto de fuerzas reales que actúan sobre el sólido

desde otro punto de vista, la descripción anterior puede reescribirse analizando el sistema de fuerzas de inercia. Las fuerzas de inercia del sólido que corresponden al sistema centro de masas tiene las siguientes características:

- su resultante \vec{F}_{in}^c equilibra en todo momento la del sistema de fuerzas reales actuantes sobre el sólido

$$\vec{F}_{in}^c + \vec{F} = \vec{0}$$

- su momento \vec{M}_c^c respecto a C es nulo

$$\vec{M}_c^c = \vec{0}$$

En las expresiones obtenidas hasta aquí se ha supuesto que las magnitudes cinéticas están definidas respecto a un sistema de referencia inercial



DFAII
 $M_c^c Fun N_c t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 10 de 28

que se considera fijo. Además, las derivadas de las magnitudes vectoriales se suponen también definidas respecto al sistema anterior. En algunas ocasiones puede ser conveniente utilizar la derivada del momento cinético *respecto al sistema sólido rígido*. Superindicaremos con un asterisco * las derivadas referidas al sólido rígido. Se sabe que

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times$$

Por lo tanto

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d^*\vec{L}_o}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_o = -\vec{v}_o \times \vec{p} + \vec{M}_o$$

de donde

$$\frac{d^*\vec{L}_o}{dt} = -\vec{v}_o \times \vec{p} - \vec{\omega} \times \vec{L}_o + \vec{M}_o$$

En el caso en que $O \equiv C$

$$\frac{d^*\vec{L}_c}{dt} = -\vec{\omega} \times \vec{L}_c + \vec{M}_c$$

A veces es conveniente trabajar con el momento cinético respecto a un sistema en translación respecto a un sistema inercial que se mueva acompañando al punto O . En este caso

$$\vec{L}_o^1 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{OP}_i \times (\vec{v}_i^1 - \vec{v}_o^1) = \vec{L}_o - m \vec{r}_c \times \vec{v}_o$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 11 de 28

derivando

$$\frac{d\vec{L}_o^1}{dt} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} - m \frac{d\vec{r}_c}{dt} \times \vec{v}_o - m \vec{r}_c \times \frac{d\vec{v}_o}{dt}$$
$$\frac{d\vec{L}_o^1}{dt} = \frac{d\vec{L}_o}{dt} - \vec{p} \times \vec{v}_o - m \vec{r}_c \times \vec{a}_o$$

sustituyendo la ecuación 3 queda

$$\frac{d\vec{L}_o^1}{dt} = -m \vec{r}_c \times \vec{a}_o + \vec{M}_o \quad (6)$$

y en particular, tomando el *sistema centro de masas* se tiene

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{M}_c \quad (7)$$

Esta propiedad, que ya se ha visto anteriormente, indica que el teorema del momento cinético se cumple en el sistema centrode masas, a pesar de no ser inercial, cuando se toma respecto al propio centro de masas. La ecuación 6 permite ampliar la aplicación de la propiedad anterior a cualquier sistema en traslación con una aceleración paralela al vector \vec{OC} .

Sea cual sea la variante elegida de la ecuación del momento cinético, ésta proporciona un conjunto de tres ecuaciones escalares que completan el sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que caracteriza la dinámica del sólido rígido.

Una vez generadas las ecuaciones de la dinámica, se procede a su expresión en función de los parámetros que posicionen el sólido respecto a un sistema fijo.



DFAII
M_ccFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 12 de 28

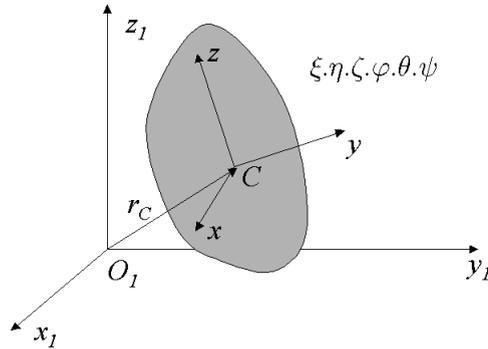


Figura 1: posición del sólido respecto a un sistema fijo

Se eligen como parámetros de posición del sólido rígido las tres coordenadas de su centro de masas respecto a una base fija $\overrightarrow{OC} = \xi \overrightarrow{v}_1 + \eta \overrightarrow{j}_1 + \zeta \overrightarrow{k}_1$ y los ángulos de Euler φ, θ, ψ de una terna ortonormal de direcciones principales de inercia del sólido $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ respecto a la terna fija $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{j}_1, \overrightarrow{k}_1\}$. Aplicando el teorema del momento cinético, se tienen las ecuaciones

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} = F_{x_1} \\ m\ddot{\eta} = F_{y_1} \\ m\ddot{\zeta} = F_{z_1} \end{cases} \quad (8)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 13 de 28

Al aplicar el teorema del momento ciético respecto al centro de masas, se tiene

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt}\Big|_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt}\Big|_* + \vec{\omega} \times \vec{L}_c$$

teniendo en cuenta que

$$\vec{L}_c = \mathbf{I}_c \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x^c & 0 & 0 \\ 0 & I_y^c & 0 \\ 0 & 0 & I_z^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_x^c \omega_x \vec{i} + I_y^c \omega_y \vec{j} + I_z^c \omega_z \vec{k}$$

se tiene el sistema de tres ecuaciones

$$\begin{cases} I_x^c \dot{\omega}_x + (I_z^c - I_y^c) \omega_y \omega_z = M_{cx} \\ I_y^c \dot{\omega}_y + (I_x^c - I_z^c) \omega_z \omega_x = M_{cy} \\ I_z^c \dot{\omega}_z + (I_y^c - I_x^c) \omega_x \omega_y = M_{cz} \end{cases} \quad (9)$$

que junto con

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (10)$$

determinan un sistema de tres ecuaciones en φ, θ, ψ que completan el sistema, que rige el movimiento de cualquier sólido rígido.

Según se ha visto en las ecuaciones anteriores, dos sistemas de fuerzas actuantes que compartan resultante y momento, es decir que, tomados como sistemas de vectores deslizantes, sean equivalentes, producen el mismo



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 14 de 28

movimiento del sólido. En la Cinemática de los sistemas indeformables también se ha visto que el movimiento de éstos puede describirse también mediante un sistema de vectores deslizantes los cuales, tomando un punto cualquiera, que elegimos en C , se definen mediante su resultante $\vec{\omega}$ y momento \vec{v}_c . Las ecuaciones 8 y 9 pueden contemplarse como un conjunto de ecuaciones que relacionan el momento del sistema cinemático del sólido con la resultante del sistema de fuerzas (8) y recíprocamente, la resultante del sistema cinemático con el momento del sistema de fuerzas (9).



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 15 de 28

4. Ligaduras en un sólido rígido

La dinámica de un sólido rígido está perfectamente determinada por el sistema de seis ecuaciones que se han deducido en las secciones anteriores. En estas ecuaciones en principio puede suponerse que las incógnitas son los parámetros que posicionan el sólido rígido y los datos son la geometría de masas y el sistema de fuerzas que actúa sobre el sólido rígido. Sin embargo hay situaciones en las cuales el movimiento del sólido está *restringido*. Por ejemplo, puede ser que se fije un eje, que no se le permita rebasar un plano, que se obligue a uno de sus puntos a seguir una trayectoria dada, etc. Se dice que el sólido rígido está *ligado*. Las restricciones del movimiento deben ser impuestas por un sistema de fuerzas, llamadas *fuerzas de ligadura*, que son las encargadas de obligar al sólido a cumplir con las restricciones impuestas. Las fuerzas de ligadura, a priori, tienen un valor desconocido y por lo tanto aportan nuevas incógnitas al problema dinámico.

Un sólido ligado, al tener su evolución restringida, necesita menos parámetros que determinen su movimiento. En efecto, la ligadura se traducirá en un conjunto de relaciones $f_i(\xi, \eta, \zeta, \varphi, \theta, \psi) = 0$ que permitirán reducir el número de incógnitas⁴ de las ecuaciones anteriores. La reducción del número de incógnitas del movimiento puede compensar la introducción de las nuevas debidas a la ligadura, o puede ser que surja un desfase entre el número de ecuaciones y de incógnitas. En el primer caso se tiene un sistema **isosático**. En el segundo se tiene un sistema *hipostático* si el número de ecuaciones es inferior al de incógnitas, o *hiperestático* en caso contrario.

⁴o, si se prefiere, aumentar el número de ecuaciones



DFAII
 $M_e c F u n N_e t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 16 de 28

En este texto se tratarán sobre todo los casos de sistemas isostáticos. Los sistemas hiperestáticos necesitan de un conjunto suplementario de ecuaciones que provienen del estudio de la *elasticidad de materiales* que es objeto de un tratamiento posterior.

El sistema de fuerzas de ligadura, según se ha dicho, es desconocido en el momento de plantear un problema, sin embargo, en muchas ocasiones debe satisfacer algunas restricciones conocidas a priori. En efecto, cuando se fuerza al sólido a tener un punto fijo, el sistema de fuerzas de ligadura puede reducirse a una resultante única que pase por el punto fijo. Si se obliga a un punto del sólido a moverse sin rozamiento sobre una recta, entonces la resultante debe ser perpendicular a la recta, etc.

A continuación se presentan algunas ligaduras a las que suele estar sujeto un sólido y las características del sistema de fuerzas que determinan. Se presupone la ausencia de rozamiento, que será tratado de forma especial posteriormente.

4.1. Cojinetes

Cuando se quiere hacer que un sólido rígido gire en torno a un eje fijo, éste se fija por medio de cojinetes. Estos pueden ser de dos tipos: axiales y radiales. Los cojinetes consisten en un anillo exterior que abraza el eje del sólido. Entre el anillo y el eje hay una corona de pequeñas esferas las cuales separan la parte fija del cojinete del eje de giro. El movimiento de estas esferitas respecto a la parte fija está limitado a una corona circular.

Si el eje no está entallado, se tiene un *cojinete radial*, como en la figura  4.1.1, el cojinete permite cualquier movimiento del eje que mantenga éste



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 17 de 28

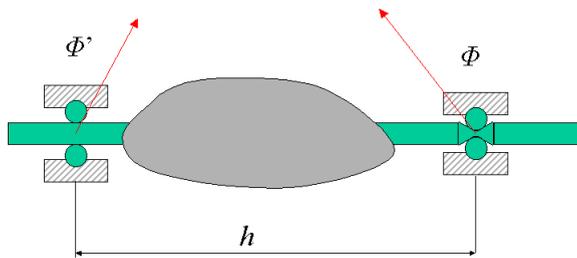


Figura 2: cojinetes radial (O') y de empuje (O)

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

pasando por el punto O. Si bien es cierto que una desviación excesiva respecto al eje del cojinete haría que éste *chocara* en general el funcionamiento del sistema impedirá esta posibilidad. Si se analiza el movimiento impedido por el cojinete, éste se reduce al movimiento del punto del eje que abraza *perpendicularmente* a su dirección. El sistema de fuerzas de ligadura *no restringe* el giro del eje alrededor del punto O y, por lo tanto, no proporciona momento respecto a O. Por otra parte, *tampoco impide el deslizamiento de O paralelamente al eje*, por lo que la ligadura tiene resultante según el eje, es decir, se puede resumir la acción del cojinete radial con las ecuaciones

$$\begin{cases} \vec{M}_o = \vec{0} \\ R_z = 0 \end{cases}$$

con lo que la ligadura introduce dos nuevas incógnitas F_x, F_y . Las restricciones cinemáticas

$$\begin{cases} v_{ox} = 0 \\ v_{oy} = 0 \end{cases}$$

ofrecen dos nuevas ecuaciones. Si el eje del sólido tiene una pequeña entalladura (íeffig:axial) entonces el movimiento de deslizamiento queda imposibilitado, con lo que la reacción ofrece una componente R_z nueva y una nueva restricción cinemática $v_z = 0$. Este cojinete recibe el nombre de *cojinete de empuje*.

En realidad los cojinetes axial y radial previamente mencionados se construyen a partir de los cojinetes radial y de empuje mostrados a continuación



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 19 de 28

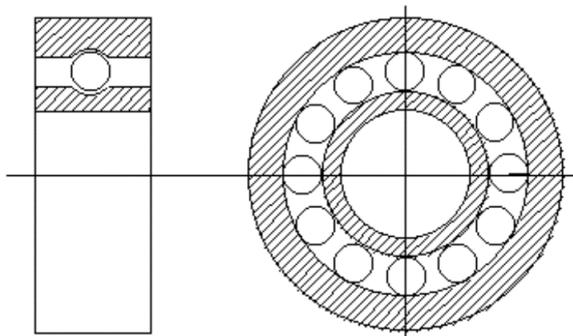


Figura 3: cojinete radial



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 20 de 28

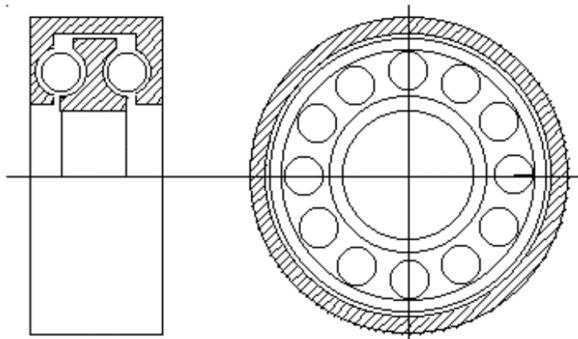


Figura 4: cojinete de empuje (O)



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 21 de 28

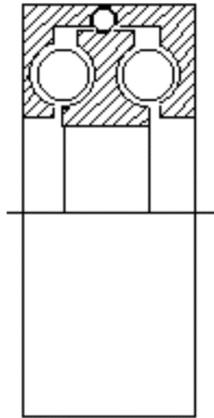


Figura 5: cojinete axial



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 22 de 28

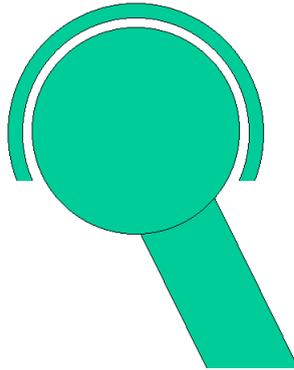


Figura 6: rótula

4.2. Rótula

Una rótula es una ligadura que fija la posición de un punto del sólido rígido pero que permite cualquier orientación del mismo. Puede materializarse de distintas formas. Una de ellas consiste en una cavidad esférica abierta fija que aloje un apéndice también esférico del sólido rígido, como puede observarse en la figura de la rótula. El sistema de fuerzas de ligadura, al no impedir el movimiento de giro en torno a O no da ningún momento, por lo que se puede reducir a una fuerza única que pasa por el punto fijo.



DFAII
 $M_e c F u n N_e t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 23 de 28

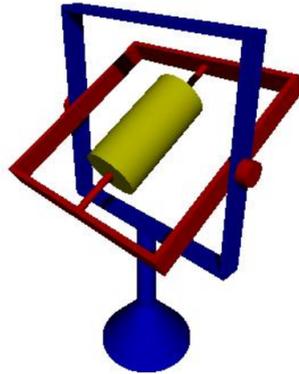


Figura 7: suspensión Cardan

$$\begin{cases} \overline{M}_o = 0 \\ \overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k} \end{cases}$$

donde R_x, R_y, R_z son tres nuevas incógnitas introducidas por la ligadura. A su vez, se introducen las correspondientes restricciones del movimiento:

$$\begin{cases} v_{ox} = 0 \\ v_{oy} = 0 \\ v_{oz} = 0 \end{cases}$$

Un sistema de ligadura equivalente a la rótula es la suspensión Cardan



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 24 de 28

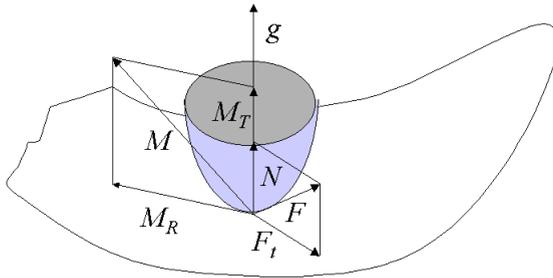


Figura 8: sólidos en contacto mutuo

(7) que consiste en permitir al sólido un movimiento compuesto formado por tres rotaciones sucesivas (una en torno al eje vertical de la figura, la segunda en torno al eje AA' y la tercera en torno al BB') concurrentes en el punto O fijo.

4.3. Contacto entre dos superficies

Cuando dos sólidos están en contacto en un punto P , la acción de uno sobre otro se descompone en fuerzas y momentos característicos, que se van a analizar en esta sección. Sean τ_1, τ_2 dos sólidos cuyos contornos son las superficies Σ_1, Σ_2 . Sea P el punto común a ambas superficies en el que,



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

| | |
|-----------------|----|
| Título | |
| Contenido | |
| ◀◀ | ▶▶ |
| ◀ | ▶ |
| Volver Atrás | |
| Cerrar | |
| Salir | |
| Página 25 de 28 | |

además, son tangentes. Para fijar ideas, se supondrá que Σ_1 es fija. Se tomará un sistema de referencia $\{P, x, y, z\}$ en el que el eje z sea paralelo a la normal común \vec{g} a las superficies Σ_1, Σ_2 y en el sentido desde Σ_1 a Σ_2 . Sea asimismo \vec{v} la velocidad de arrastre de τ_2 respecto a τ_1 en P . La impenetrabilidad de los sólidos impondrá la siguiente condición cinemática

$$\vec{v} \cdot \vec{g} = v_z \geq 0 \quad (11)$$

pues en caso contrario τ_1 penetraría en τ_2 .

Para garantizar la condición anterior, el sólido τ_2 ejerce sobre τ_1 una fuerza paralela a \vec{g} , de forma que

$$\vec{R} \cdot \vec{g} = R_z = N \geq 0 \quad (12)$$

Si no existe rozamiento, la única incógnita N adicional introducida por la ligadura es compensada por la ecuación ñefcondcin, teniendo en cuenta las siguientes condiciones

$$\begin{cases} v_z > 0 \Rightarrow N = R_z = 0 \\ v_z = 0 \Rightarrow N = R_z \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

Generalmente, entre las superficies de contacto de los sólidos hay una resistencia al movimiento relativo de las mismas. Esto produce fuerzas de rozamiento que se nombran según el movimiento que tienden a impedir y que son:



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 26 de 28

- Rozamiento al deslizamiento El rozamiento al deslizamiento se opone a la velocidad de deslizamiento entre las dos superficies, es decir a $\vec{g} \times (\vec{v} \times \vec{g}) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$. Su valor máximo está acotado por el producto μN donde μ es un coeficiente adimensional llamado coeficiente al deslizamiento. Es necesario indicar que la fuerza de rozamiento no siempre vale μN , sino que si puede impedir el deslizamiento con un valor menor, tomará dicho valor. Por el contrario, cuando el deslizamiento existe, la fuerza de rozamiento sí estará al máximo. Es decir, si v_d es el módulo de la velocidad de deslizamiento $v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

$$\begin{cases} v_d > 0 \Rightarrow \vec{F}_r = -\mu N \frac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}{v_d} \\ v_d = 0 \Rightarrow |\vec{F}_r| \leq \mu N \end{cases} \quad (14)$$

- Rozamiento a la rodadura Como en el caso anterior, este rozamiento se opone al movimiento relativo de rodadura, es decir a la componente tangencial de la rotación $\vec{\omega}$ de τ_2 respecto a τ_1 . Sea $\vec{\omega}_r$ la rotación de rodadura y ω_r su módulo. El momento que ejerce τ_1 sobre τ_2 tendrá la dirección de $\vec{\omega}_r$, sentido contrario y un módulo máximo δN donde δ es un coeficiente con dimensiones de longitud que recibe el nombre de coeficiente de resistencia a la rodadura. Por lo tanto,

$$\begin{cases} \omega_r > 0 \Rightarrow \vec{M}_r = -\delta N \frac{\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}}{\omega_r} \\ \omega_r = 0 \Rightarrow |\vec{M}_r| \leq \delta N \end{cases} \quad (15)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 27 de 28

- Rozamiento al pivotamiento En este caso, se estudia la resistencia al movimiento relativo de pivotamiento. El sólido τ_2 recibe de τ_1 un momento de resistencia al pivotamiento M_p según la dirección de \vec{g} y que se opone a la rotación de pivotamiento ω_p de τ_2 respecto a τ_1 con un valor máximo ϵN donde ϵ es el coeficiente de resistencia al pivotamiento y tiene dimensiones de longitud. Por lo tanto

$$\begin{cases} \omega_p \neq 0 \Rightarrow \vec{M}_p = -\epsilon N \frac{\omega_z \vec{k}}{|\omega_z|} \\ \omega_p = 0 \Rightarrow |\vec{M}_p| \leq \epsilon N \end{cases} \quad (16)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 28 de 28