

Dinámica del sólido rígido con eje fijo

$M_{\epsilon}CFUNN_{\epsilon}T$

UPM



DFAII
ETSII, UPM

Resumen

Contenido

Página Inicial



Volver

Cerrar

Salir

Contenido

1	Introducción	3
2	Reacciones de ligadura	6
3	Equilibrado estático y dinámico	9
4	Ejes permanentes de rotación	14
5	Péndulo compuesto	16



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 2 de 20

1. Introducción

Dentro de los problemas de la dinámica del sólido rígido ligado se estudia el caso de eje fijo. Se supondrá un sólido rígido τ con un eje fijo δ sobre el que actúa un sistema de fuerzas $\{\vec{F}_i\}_{i=1,\dots,n}$ conocido. Se supondrá que el eje fijo del sólido está sujeto mediante dos cojinetes, uno axial, aplicado en un punto O y otro radial en un punto O' . Se tomará un sistema de referencia solidario al sólido $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ cuyo tercer eje tenga la dirección y sentido del vector \vec{OO}' . Se llamará \vec{F} a la resultante del sistema de fuerzas $\{\vec{F}_i\}_{i=1,\dots,n}$ y \vec{M} al momento del mismo respecto al punto O . Se llamará asimismo h la tercera coordenada de O' en la referencia anterior y \mathbf{I} al tensor de inercia del sólido rígido en O . Se tomará un sistema de referencia fijo $\{O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$ que coincida inicialmente con el $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Las fuerzas de ligadura, según lo que se ha visto en los cojinetes, serán:

- en O : una fuerza con tres componentes:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

- en O' : una fuerza sin componente axial, es decir:

$$\vec{R}' = R'_x \vec{i} + R'_y \vec{j} + R'_z \vec{k}$$

El movimiento del sólido rígido puede parametrizarse por una única coordenada φ que represente el giro del sistema $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ solidario al sólido respecto al sistema fijo $\{O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$.



DFAII
M_ccFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 3 de 20

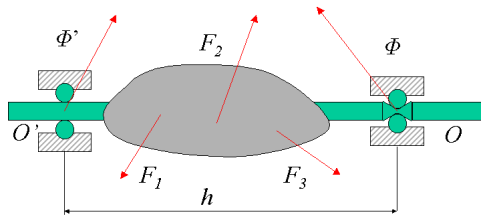


Figura 1: sólido rígido con eje fijo

A continuación se trata de obtener una ecuación diferencial cuya única incógnita sea la variable φ y, por lo tanto, no aparezcan las componentes de las reacciones de la ligadura. Para ello se busca un principio de la dinámica en el cual no intervengan las reacciones. Este puede ser el teorema del momento cinético áxico respecto al eje fijo. En efecto, al estar aplicadas en puntos del eje, las reacciones no dan momento áxico respecto al mismo.

El siguiente paso consiste en expresar el momento cinético áxico en función de la variable φ , sus derivadas y la geometría de masas del sólido rígido. Aplicando la fórmula ñeflofijo, se obtiene

$$\vec{L}_o = \mathbf{I}_o \cdot \omega$$
$$L_z = \vec{k} \cdot \vec{L}_o = I_z \omega_z = I_z \dot{\varphi}$$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 4 de 20

y aplicando el teorema del momento cinético áxico

$$\frac{L_z}{dt} = M_z$$

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z \quad (1)$$

ecuación cuya única incógnita es φ , como se buscaba.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 5 de 20

2. Reacciones de ligadura

Como se ha visto en la sección anterior, la ecuación diferencial del movimiento del sólido no presenta dificultades excesivas. Suele ser más interesante el cálculo de las reacciones en los cojinetes. Es decir, la determinación de los valores R_x, R_y, R_z de la fuerza de ligadura del cojinete O y los valores R'_x, R'_y que forman la fuerza de ligadura en O' . Se utilizarán los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético respecto al punto O , prescindiendo del momento cinético áxico respecto al eje fijo, que ya está utilizado en el apartado anterior. El teorema de la cantidad de movimiento se escribe:

$$m\dot{\vec{v}}_c = \vec{F} + \vec{R} + \vec{R}'$$

la velocidad del centro de masas es

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times \vec{r}_c$$

y su aceleración

$$\vec{a}_c = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)$$

por tanto

$$m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)) = \vec{F} + \vec{R} + \vec{R}' \quad (2)$$

La aplicación de la ecuación del momento cinético requiere una aclaración previa. El momento cinético respecto al punto de apoyo O es:

$$\vec{L}_o = \mathbf{I}_o \cdot \vec{\omega}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 6 de 20

El tensor de inercia del sólido es constante *respecto al sólido*, pero no lo es respecto a un sistema de referencia inercial. Por lo tanto es conveniente derivar con respecto al tiempo a través de la base móvil. Es decir

$$\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{L}_o$$

pero como

$$\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_S = \mathbf{I}_o \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_1 = \mathbf{I}_o \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{\omega}$$

El momento de las fuerzas aplicadas es \vec{M} , el de la ligadura en O es nulo y el de la ligadura en O' es $h \vec{k} \times \vec{R}^j$ con lo que

$$\mathbf{I}_o \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{\omega} = \vec{M} + h \vec{k} \times \vec{R}^j \quad (3)$$

Las ecuaciones 2 y 3 representan un sistema de seis ecuaciones. Una de ellas, la proyección de la 3 sobre el eje fijo, sirve para determinar el movimiento, y las cinco restantes determinan las componentes de la fuerza de reacción. En efecto, multiplicando vectorialmente la ecuación 3 por el vector \vec{k} , se tiene:

$$(\mathbf{I}_o \cdot \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{k} + (\vec{\omega} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{\omega}) \times \vec{k} = \vec{M} \times \vec{k} + h \vec{R}^j$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 7 de 20

de donde

$$\vec{R} = \frac{(\mathbf{I}_o \cdot \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{k} + (\vec{\omega} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{\omega}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h} \quad (4)$$

y utilizando la ecuación 2

$$\vec{R} = -\vec{F} + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) - \frac{(\mathbf{I}_o \cdot \dot{\vec{\omega}}) \times \vec{k} + (\vec{\omega} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{\omega}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h} \quad (5)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 8 de 20

3. Equilibrado estático y dinámico

Las expresiones obtenidas para \vec{R} , \vec{R}' pueden proyectarse sobre la base móvil o la base fija. Es más interesante obtener las componentes de las reacciones en la base fija. En efecto, las máquinas rotatorias ejercen sobre la bancada en la que se apoyan unas fuerzas opuestas a las de reacción. Estas fuerzas pueden inducir vibraciones o deformaciones sobre los órganos sustentantes, por lo que necesario estudiar su carácter.

Las expresiones 4 y 5 proporcionan los valores de \vec{R}' y \vec{R} respectivamente. Sustituyendo $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}$ se tiene

$$\vec{R}' = \frac{\ddot{\varphi}(\mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\varphi}^2(\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h} \quad (6)$$

$$\vec{R} = -\vec{F} + m(\ddot{\varphi} \vec{k} \times \vec{r}_c + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r})) -$$

$$\frac{\ddot{\varphi}(\mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\varphi}^2(\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} - \vec{M} \times \vec{k}}{h} \quad (7)$$

La ecuación 6 determina el valor de \vec{R}' y puede comprobarse que es perpendicular al vector \vec{k} . En cuanto a la reacción \vec{R} , está determinada por la ecuación 7 y puede observarse que su componente según \vec{k} es $R_z = -F_z$, como era previsible, ya que la posición del centro de masas debe mantener su tercera coordenada en la base fija, y por tanto, las fuerzas según esta el tercer eje deben equilibrarse.

Las componentes según el plano perpendicular al eje se presentan como la suma de términos de distinta naturaleza: los que dependen sólo del



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 9 de 20

sistema de fuerzas aplicado, es decir de su resultante y momento \vec{F}, \vec{M} y los que dependen de la geometría de masas $m, \vec{r}_c, \mathbf{I}_o$ y la cinemática $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}' = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\vec{M} \times \vec{k}}{h} \\ + \\ \frac{\ddot{\varphi}(\mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\varphi}^2(\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k}}{h} \end{array} \right. \\ \vec{R}_{xy} = \left\{ \begin{array}{l} -\vec{F} + \frac{\vec{M} \times \vec{k}}{h} \\ + \\ m(\ddot{\varphi} \vec{k} \times \vec{r}_c + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r})) \\ - \\ \frac{\ddot{\varphi}(\mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\varphi}^2(\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k}}{h} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (8)$$

Los primeros términos son los mismos que aparecerían en condiciones estáticas. En efecto, si el sólido estuviera inicialmente en reposo y el sistema de fuerza aplicadas no diera momento áxico respecto al eje fijo, entonces φ sería constante y las reacciones \vec{R}, \vec{R}' serían

$$\vec{R}_s = -\vec{F} + \frac{\vec{M} \times \vec{k}}{h}$$

$$\vec{R}'_s = -\frac{\vec{M} \times \vec{k}}{h}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 10 de 20

por lo que reciben el nombre de componentes estáticas de la reacción.

Cuando el sólido gira, las reacciones en los cojinetes tiene unas componentes suplementarias que dependen linealmente de $\dot{\varphi}^2$, $\ddot{\varphi}$ y que se conocen como componentes centrífugas.

$$\begin{aligned}\vec{R}_{cc} &= m(\ddot{\varphi} \vec{k} \times \vec{r}_c + \dot{\varphi}^2 \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}')) - \\ &\quad - \frac{\ddot{\varphi}(\mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\varphi}^2(\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k}}{h} \\ \vec{R}_{cc} &= \frac{\ddot{\varphi}(\mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} + \dot{\varphi}^2(\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k}}{h}\end{aligned}$$

Estas componentes son perpendiculares al vector unitario \vec{k} y pueden evaluarse en la base móvil o en la base fija. Es más fácil realizar la evaluación en la primera, pues las componentes de \vec{r}_c, \mathbf{I}_o son constantes, y realizar posteriormente un cambio de base a la fija. En efecto,

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &= \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{r}_c &= -\eta \vec{i} + \xi \vec{j} \\ \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}_c) &= -\xi \vec{i} - \eta \vec{j} \\ \mathbf{I}_o \cdot \vec{k} &= -P_{zx} \vec{i} - P_{yz} \vec{j} + I_z \vec{k} \\ \vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k} &= P_{yz} \vec{i} - P_{zx} \vec{j} \\ (\vec{k} \times \mathbf{I}_o \cdot \vec{k}) \times \vec{k} &= -P_{zx} \vec{i} - P_{yz} \vec{j}\end{aligned}$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 11 de 20

con lo que puede escribirse

$$\begin{aligned}
 R_{x_{cc}} &= \ddot{\varphi} \left(-m\eta + \frac{P_{yz}}{h}\right) + \dot{\varphi}^2 \left(-m\xi - \frac{P_{zx}}{h}\right) \\
 R_{y_{cc}} &= \ddot{\varphi} \left(m\xi - \frac{P_{zx}}{h}\right) + \dot{\varphi}^2 \left(-m\eta - \frac{P_{yz}}{h}\right) \\
 R'_{x_{cc}} &= \ddot{\varphi} \left(-\frac{P_{yz}}{h}\right) + \dot{\varphi}^2 \frac{P_{zx}}{h} \\
 R'_{y_{cc}} &= \ddot{\varphi} \frac{P_{zx}}{h} + \dot{\varphi}^2 \frac{P_{yz}}{h}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Suponiendo un régimen de giro con velocidades sensiblemente constantes o de variación lenta, puede considerarse que las expresiones 9 son constantes. Las componentes de la fuerza de reacción en la base fija serán, al aplicar un cambio de ejes:

$$\begin{aligned}
 R_{ccx1} &= R_x \cos \varphi - R_y \sin \varphi \\
 R_{ccy1} &= R_x \sin \varphi + R_y \cos \varphi
 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, tendrán un carácter oscilatorio de la misma frecuencia que el giro. Puede llegar a suceder que las componentes centrífugas sean tan fuertes que su carácter oscilatorio produzca, además de las vibraciones de la sustentación, incluso su rotura. Por ello, sería conveniente hacerlas nulas.

Si $\eta = \xi = 0$ y además $P_{zx} = P_{yz} = 0$, las componentes centrífugas desaparecen, y las reacciones en los apoyos son independientes del movimiento, es decir son las componentes estáticas. Cuando esto sucede se dice que el eje está *dinámicamente equilibrado*.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 12 de 20

Cuando la única fuerza aplicada es el peso e inicialmente el sólido está en reposo, entonces si $\eta = \xi = 0$ entonces cualquier posición inicial, es decir para cualquier φ_0 el sistema está en equilibrio. En estas condiciones se dice que el sólido se encuentra *estáticamente equilibrado*.



DFAII
 $M_{\epsilon}cFunN_{\epsilon}t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 13 de 20

4. Ejes permanentes de rotación

Las ecuaciones anteriores pueden utilizarse para estudiar las condiciones en que se pueden suprimir uno o los dos apoyos. Supóngase que no existen fuerzas exteriores aplicadas sobre el sólido. En este caso, $\vec{F} = \vec{0} \wedge \vec{M} = \vec{0}$. La rotación inicial es $\vec{\omega}_0$. Entonces, para anular la reacción \vec{R}^j es necesario y suficiente que

$$P_{zx} = P_{yz} = 0$$

es decir que la recta soporte de la rotación sea un eje del elipsoide de inercia de O . Estos ejes se llaman *ejes permanentes de rotación*. Es decir, si se fija un punto de un sólido rígido sobre el que no hay fuerzas aplicadas¹ y se le dota de una rotación inicial en torno a un eje permanente de rotación, ésta se mantendrá indefinidamente con el mismo valor y dirección. El resultado complementario sería que, si la rotación inicial no lleva la dirección de un eje del elipsoide de inercia del punto fijo, ésta cambia espontáneamente de dirección y sentido², y, si se quiere mantener, es necesario sujetar otro punto del sólido. Para anular también el apoyo O , es necesario y suficiente que

$$\xi = \eta = 0$$

es decir, que el centro de masas se encuentre sobre el eje de rotación. Recordando que si una recta pasa por el centro de masas entonces es eje

¹o, más en general, que las fuerzas aplicadas definan un momento nulo respecto al punto fijo

²el problema del movimiento por inercia de un sólido rígido con un punto fijo constituye el denominado *problema de Euler Poinso*t y será estudiado en un capítulo posterior.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 14 de 20

de los elipsoides de inercia de todos sus puntos o no lo es de ninguno, se deduce que el eje de rotación debe ser una recta principal de inercia. Se dice entonces que el eje es un *eje espontáneo de rotación*. Por lo tanto, si a un sólido rígido se le comunica una rotación inicial en torno a un eje espontáneo de rotación, entonces éste se mantiene indefinidamente. Es decir, si se le comunica a un sólido libre una rotación inicial en torno a un eje que no sea un eje espontáneo de rotación, entonces la rotación cambiará espontáneamente de módulo y dirección.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 15 de 20

5. Péndulo compuesto

En esta sección se aborda el problema del movimiento de un sólido pesado que puede girar alrededor de un eje horizontal (eje de suspensión). Se tomará un sistema de referencia móvil cuyo tercer eje sea el eje fijo, cuyo primer eje contenga al centro de masas y cuyo segundo eje forme junto con los anteriores un triedro trirrectángulo. Según esto,

$$\vec{r}_c = \xi \vec{v}$$

Se tomará asimismo un sistema de referencia fijo con el mismo origen y tercer eje que el móvil, primer eje vertical descendente y segundo eje de forma que se tenga una referencia ortonormal a derechas. Si φ es el ángulo que est sistema móvil está girado respecto al fijo, se tiene

$$\vec{v} = \cos \varphi \vec{v}_1 + \sin \varphi \vec{j}_1$$

$$\vec{j} = -\sin \varphi \vec{v}_1 + \cos \varphi \vec{j}_1$$

El momento de la fuerza gravitatoria respecto al eje fijo es

$$M_z = (\vec{r}_c, mg \vec{v}_1, \vec{k}) = mg \begin{vmatrix} \xi \cos \varphi & \xi \sin \varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y la ecuación diferencial del movimiento es

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z = -mg\xi \sin \varphi$$



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 16 de 20

es decir

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\frac{I_z}{m\xi}} \sin \varphi = 0$$

ecuación similar a la de un péndulo simple de longitud $\ell = \frac{I_z}{m\xi}$. Este péndulo simple se llama péndulo síncrono. Se define el eje de oscilación como aquél paralelo a la suspensión, situado al otro lado del centro de masas y que dista del primero una distancia igual a la del péndulo simple síncrono ℓ . Los puntos del sólido situados sobre el eje de oscilación se mueven como si estuvieran unidos al eje de suspensión por un alambre rígido sin masa, es decir como si se tratase de péndulos simples.

Si se expresa el momento de inercia respecto al eje z en función del eje paralelo al mismo que pasa por el centro de masas (fórmula de Steiner)

$$I_z = I_{cz} + m\xi^2$$

$$\ell = \frac{I_{cz}}{m\xi} + \xi$$

llamando ξ' a la distancia del eje de oscilación al centro de masas, se tiene

$$\xi' = \ell - \xi \Rightarrow \xi\xi' = \frac{I_z}{m}$$

expresión que indica que los conceptos de eje de suspensión y de oscilación son recíprocos, es decir si z' es el eje de oscilación cuando z es el de suspensión, entonces z es el eje de oscilación cuando z' es el de suspensión.

A continuación se enuncia el *teorema de Huyghens*



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 17 de 20

Si se suspende un sólido rígido, a un lado y a otro del centro de masas, por dos ejes paralelos, a distinta distancia de éste y las oscilaciones correspondientes tienen la misma longitud del péndulo simple síncrono, entonces la distancia entre ambos ejes es la longitud equivalente.

Demostración

Será suficiente demostrar que

$$\xi + \xi' = \ell$$

por hipótesis se tiene

$$\ell = \ell' \Rightarrow \frac{I_z}{m\xi} + 1 = \frac{I_z}{m\xi'} = \xi'$$

$$I_z(\xi - \xi') = m\xi\xi'(\xi - \xi')$$

como $\xi \neq \xi'$

$$I_z = m\xi\xi' = m \frac{m}{I_z(\ell - \xi)} \xi'$$

de donde

$$\ell - \xi = \xi' \Rightarrow \ell = \xi + \xi'$$

como se quería demostrar. El teorema anterior sirve de base teórica al péndulo simple de Kater. Este consiste en un sólido rígido con dos cuchillas móviles paralelas de las que se puede suspender. Ajustando la posición de las cuchillas a un lado y otro del centro de masas y a distinta distancia de éste, hasta obtener oscilaciones isócronas en ambas cuchillas, se mide la



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 18 de 20

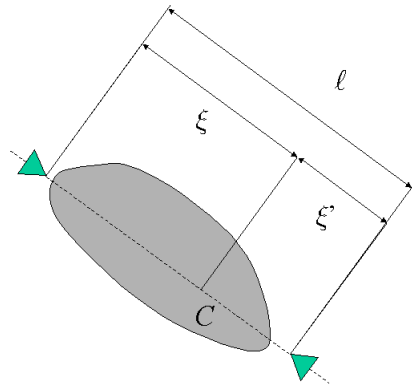


Figura 2: péndulo de Kater



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 19 de 20

distancia entre ambas, que es la longitud del péndulo simple síncrono y que para pequeñas oscilaciones está relacionada con el periodo por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

que permite despejar el valor de la aceleración de la gravedad g

$$g = 4\pi^2\frac{\ell}{T^2}$$

principal utilidad del péndulo de Kater.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 20 de 20