

Dinámica del sólido rígido pesado con un punto fijo

$M_{\epsilon}cFUNN_{\epsilon}T$

UPM



DFAII
ETSII, UPM

Resumen

Contenido

Página Inicial



Volver

Cerrar

Salir

Contenido

1	Introducción	3
2	Ecuaciones del movimiento	4
3	Trompo pesado	5
4	Caso de rotación inicial propia	23
5	Sentido de la precesión en el caso A.2.c	26



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 2 de 35

1. Introducción

El siguiente problema que se aborda es el conocido como problema de Lagrange Poinsot que consiste en la determinación de la evolución de un sólido rígido con un punto fijo bajo la acción de su propio peso como única fuerza aplicada. En este caso, se supondrá que el tercer eje fijo se toma según la dirección vertical ascendente, a diferencia de la elección realizada en el problema anterior, donde se definió según la dirección y sentido del momento cinético del sólido que permanecía constante. En este caso, al actuar una fuerza (el peso) que define un momento no nulo respecto al punto fijo, no se va a tener un momento cinético constante. Según la metodología general se busca la aplicación de aquéllos principios de la dinámica en los que no aparezca la fuerza de reacción del punto fijo. Un punto de partida que siempre garantiza la obtención de un sistema de ecuaciones que determina las tres incógnitas del movimiento es el sistema de ecuaciones de Euler. Sin embargo nosotros buscaremos la aplicabilidad de algunos principios de conservación para obtener un sistema con algunos pasos de integración ya hechos.



DFAII
 $M_e c Fun N_e t$

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 3 de 35

2. Ecuaciones del movimiento

La fuerza aplicada deriva de un potencial, por lo tanto, teniendo en cuenta que la fuerza de ligadura está aplicada sobre un punto fijo, se tiene que la energía mecánica se conserva. Llamando ξ, η, ζ a las coordenadas del centro de masas en el sistema móvil y ξ_1, η_1, ζ_1 a sus coordenadas en el sistema fijo, se tiene

$$\mathcal{E}_c + mg\zeta_1 = E \Rightarrow \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) + mg(\xi \sin \theta \sin \psi + \eta \sin \theta \cos \psi + \zeta \cos \theta) = E$$

Por otra parte, el momento áxico respecto al eje z_1 del peso es nulo, pues es paralelo a dicho eje. Como la fuerza de ligadura está aplicada en el eje z_1 , su momento áxico respecto a este eje también es nulo. Se tiene

$$I_x\omega_x \sin \theta \sin \psi + I_y\omega_y \sin \theta \cos \psi + I_z\omega_z \cos \theta = L_{z_{10}}$$

por último, para completar el sistema puede utilizarse la tercera ecuación de Euler

$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = (\vec{r}_c, -mg\vec{k}_1, \vec{k})$$

El sistema de ecuaciones obtenido se reduce a cuadraturas en un conjunto reducido de casos. Los que se describen en la literatura mecánica son dos. El más típico es el caso en que el elipsoide de inercia del punto fijo se a de revolución y el centro de masas se encuentre sobre dicho eje. El otro caso es el planteado por Madame Kowalesky, en el que el elipsoide de inercia también es de revolución momento de inercia respecto al eje es la mitad que lo momentos respecto a las rectas ecuatoriales. Trataremos únicamente el primer caso.



DFAII
M_cFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 4 de 35

3. Trompo pesado

El caso en que el elipsoide de inercia del punto fijo es de revolución y el centro de masas se encuentra sobre dicho eje es el que se conoce como el del trompo simétrico pues modeliza la dinámica de la peonza pesada. Se deducirán en primer lugar las ecuaciones del movimiento y a continuación se clasificarán los tipos de éste que pueden definirse a partir de las ecuaciones obtenidas.

3.1. Ecuaciones del movimiento

Como el centro de masas se encuentra sobre el eje de revolución del elipsoide, se tomará el tercer eje móvil según dicho eje y por lo tanto $\xi = \eta = 0$.

Como el peso está aplicado en el centro de masas, que es un punto de eje z , no tiene momento áxico respecto a dicho eje y tercera ecuación de Euler proporciona

$$I_z \dot{\omega}_z = 0 \Rightarrow \omega_z = \omega_{z0}$$

La integral del teorema de la energía cinética se escribe

$$I_x(\omega_x^2 + \omega_y^2) + I_z \omega_{z0}^2 + 2mg\zeta \cos \theta = 2E$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones que relacionan las componentes de la rotación en el sistema móvil con las rotaciones de Euler, se tiene

$$I_x(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = 2E - I_z \omega_{z0}^2 - 2mg\zeta \cos \theta \quad (1)$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 5 de 35

La ecuación de conservación del momento áxico respecto al eje z_1 se escribe

$$I_x \sin \theta (\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi) + I_z \omega_z \cos \theta = I_x \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_z \omega_z \cos \theta = L_{z01} \quad (2)$$

llamando $u = \cos \theta$ se tiene

$$\dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta} \Rightarrow \dot{u}^2 = \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = (1 - u^2) \dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{(1 - u^2)}$$

La ecuación 2 resulta

$$I_x \dot{\varphi} (1 - u^2) = L_{z01} - I_z \omega_{z0} u \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\frac{L_{z10}}{I_x} - \frac{I_z}{I_x} \omega_{z0} u}{1 - u^2}$$

Llamando

$$\beta = \frac{L_{z10}}{I_x}$$

$$b = \frac{I_z}{I_x}$$

se tiene

$$\dot{\varphi} = \frac{\beta - b\omega_{z0}u}{1 - u^2} \quad (3)$$

Si ahora se toma la energía cinética

$$I_x (\dot{u}^2 (1 - u^2) + (\frac{\beta - b\omega_{z0}u}{1 - u^2})^2 (1 - u^2)) = 2E - I_z \omega_{z0}^2 - 2mg\zeta u \Rightarrow \dot{u}^2 = (\frac{2E - I_z \omega_{z0}^2}{I_x} - \frac{2mg\zeta}{I_x} u) (1 - u^2) - (\beta - b\omega_{z0}u)^2$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 6 de 35

llamando

$$\alpha = \frac{2E - I_z \omega_{z0}^2}{I_x}$$
$$a = \frac{2mg\zeta}{I_x}$$

queda

$$\dot{u}^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - b\omega_{z0}u)^2$$

se llamará $f(z)$ al polinomio

$$f(z) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - b\omega_{z0}u)^2$$

La integral

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{f(z)}} = (t - t_0)$$

resuelve la evolución de la variable $u(t)$ y por lo tanto la del ángulo $\theta(t)$.

El ángulo $\varphi(t)$ se obtiene de

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{u_0}^u \frac{(\beta - b\omega_{z0}u)du}{(1 - u^2)\sqrt{f(u)}}$$

y por último,

$$\psi - \psi_0 = \omega_{z0}(t - t_0) + \int_{u_0}^u \frac{(\beta - b\omega_{z0}u)udu}{(1 - u^2)\sqrt{f(u)}}$$

con lo que la evolución del sólido queda reducida a cuadraturas. Por otra parte, antes de entrar en la discusión sobre los tipos de movimiento del



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 7 de 35

sólido rígido, conviene tener la expresión del ángulo λ que forma la proyección de la trayectoria del centro de masas sobre el plano horizontal y la dirección radial desde el punto O . Si (ρ, χ) son las coordenadas polares de la proyección de C sobre el plano horizontal, entonces:

$$tg\lambda = \frac{\rho d\chi}{d\rho} = \frac{\zeta \sin \theta d\varphi}{d(\zeta \sin \theta)} = \frac{\beta - b\omega_{z0}u}{u\sqrt{f(u)}}$$

3.2. Tipos de movimiento

Se recopilan las ecuaciones necesarias para la discusión

$$\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - b\omega_{z0}u)^2 \quad (4)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\beta - b\omega_{z0}u}{1 - u^2} \quad (5)$$

$$tg\lambda = \frac{\beta - b\omega_{z0}u}{u\sqrt{f(u)}} \quad (6)$$

En primer lugar se distinguen los movimientos *zonales* de los movimientos *polares*. Los primeros se caracterizan porque están confinados en una zona esférica que no contiene a los polos; los segundos, sin embargo, contienen a estos últimos.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 8 de 35

3.3. Movimientos zonales (A)

Se dice que el trompo pesado tiene un movimiento zonal si y sólo si

$$f(1) \neq 0 \wedge f(-1) \neq 0$$

Por lo tanto, en los movimientos zonales

$$f(1) = -(\beta - b\omega_{z0})^2 < 0 \wedge f(-1) = -(\beta + b\omega_{z0})^2 < 0$$

llamando

$$\gamma = \frac{\beta}{b\omega_{z0}}$$

se tiene

$$\gamma \neq \pm 1 \wedge f(1) < 0 \wedge f(-1) < 0$$

La zona del movimiento para la variable u debe corresponder a valores de u para los cuales $f(u) \geq 0$. El polinomio $f(u)$ es de tercer grado con el coeficiente principal positivo. Esto quiere decir que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty \wedge \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty$$

lo que quiere decir que, dado que $f(1) < 0$, existe al menos una raíz u_3 de $f(u)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. Como para algún valor de u , $-1 \leq u \leq 1$ debe cumplirse que $f(u) \geq 0$ y $f(-1) < 0 \wedge f(1) < 0$ deben existir dos raíces reales distintas ($u_1 < u_2$) o una doble ($u_1 = u_2$) en el intervalo $(-1, 1)$. Se analizarán estos dos casos



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 9 de 35

3.3.1. A.1. $u_1 = u_2$. MOVIMIENTO ESTACIONARIO

En este caso, permanentemente ha de ser $u = u_1 = u_2 = u_0$. Se procede en primer lugar a identificar la relación que debe verificarse entre las condiciones iniciales del movimiento para que se dé el movimiento estacionario. La condición de raíz doble implica que u_0 es un cero de $f(u)$ y de $f'(u)$, es decir

$$(\alpha - au_0)(1 - u_0^2) - (\beta - b\omega_{z0}u_0)^2 = 0 \quad (7)$$

$$-a(1 - u_0^2) - 2au_0(\alpha - au_0) + 2b\omega_{z0}(\beta - b\omega_{z0}u_0) = 0 \quad (8)$$

o bien

$$3au_0^2 - 2(\alpha + b^2\omega_{z0}^2)u_0 + (2b\omega_{z0}\beta - a) = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene

$$u_0 = \frac{\alpha + b^2\omega_{z0}^2 \pm \sqrt{(\alpha + b^2\omega_{z0}^2)^2 - 3a(2b\omega_{z0}\beta - a)}}{3a}$$

Como u_0 debe ser una raíz doble menor que la simple u_3 se retiene el signo menos y se sustituye en la ecuación $f(u_0) = 0$

$$\left(\alpha - a\left(\frac{\alpha + b^2\omega_{z0}^2 - \sqrt{(\alpha + b^2\omega_{z0}^2)^2 - 3a(2b\omega_{z0}\beta - a)}}{3a}\right)\right)$$
$$\left(1 - \left(\frac{\alpha + b^2\omega_{z0}^2 - \sqrt{(\alpha + b^2\omega_{z0}^2)^2 - 3a(2b\omega_{z0}\beta - a)}}{3a}\right)^2\right) -$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 10 de 35

$$-(\beta - b\omega_{z0}(\frac{\alpha + b^2\omega_{z0}^2 - \sqrt{(\alpha + b^2\omega_{z0}^2)^2 - 3a(2b\omega_{z0}\beta - a)}}{3a}))^2 = 0$$

la cual, junto con el par de condiciones $\gamma \neq \pm 1$ es suficiente para identificar este tipo de movimiento. Existen alternativas a la expresión anterior, en el caso de que las condiciones iniciales vengan expresadas como rotaciones de Euler. En efecto, si se elimina α entre las ecuaciones 7 y 8

$$-\frac{a}{2} - u_0(\frac{\beta - b\omega_{z0}u_0}{1 - u_0^2})^2 + b\omega_{z0}\frac{\beta - b\omega_{z0}u}{1 - u_0^2} = 0$$

teniendo en cuenta que

$$\beta - b\omega_{z0}u = \dot{\varphi}(1 - u^2)$$

queda

$$u_0\dot{\varphi}_0^2 - b\omega_{z0}\dot{\varphi}_0 + \frac{a}{2} = 0 \quad (9)$$

que junto con la condición $\dot{\theta}_0 = 0$ completa las relaciones necesarias para tener un movimiento estacionario.

Si se despeja el valor de la precesión en 9 se tiene una solución doble para cada valor de u_0 .

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{b\omega_{z0} \pm \sqrt{b^2\omega_{z0}^2 - 2au_0}}{2u_0} = b\omega_{z0} \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2au_0}{b^2\omega_{z0}^2}}}{2u_0}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 11 de 35

Si $\frac{a}{b\omega_{z0}} \ll 1$, es decir si la rotación inicial del trompo es tan rápida como para que su energía cinética sea mucho mayor que las posibles variaciones de energía potencial gravitatoria, entonces las soluciones que se obtienen son

$$\dot{\varphi}_0 = b\omega_{z0} \frac{1 \pm \left(1 - \frac{au_0}{b^2\omega_{z0}^2}\right)}{2u_0}$$

que origina una solución rápida

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{b\omega_{z0}}{u_0}$$

que coincide con la obtenida considerando el movimiento inercial y, por lo tanto, despreciando el efecto de la gravedad $a = 0$. La segunda solución, (solución lenta) es

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{a}{2b\omega_{z0}} = \frac{mg\zeta}{I_z\omega_{z0}}$$

que corresponde al movimiento giroscópico, tratado más adelante.

La descripción del movimiento estacionario es muy sencilla. El ángulo θ permanece constante, así como la precesión y la rotación propia. Por lo tanto el trompo describe un movimiento de nutación nula y precesión y rotación propia uniformes.

A.2.

Si el polinomio $f(u)$ tiene dos raíces reales distintas $u_1 < u_2$ en el intervalo $(-1, 1)$ entonces se distinguirán los siguientes casos



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 12 de 35

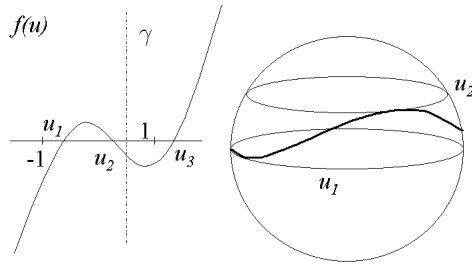


Figura 1: movimiento A.2.

- Si $\gamma \notin [u_1, u_2]$ se tiene el *movimiento absidal*
- Si $\gamma = u_1, \gamma = u_2$ se tiene el *movimiento con cúspides*
- Si $\gamma \in (u_1, u_2)$ se tiene el *movimiento con precesión alternativa*

3.3.2. A.2.a $\gamma \notin [u_1, u_2]$ MOVIMIENTO ABSIDAL

En este caso las condiciones iniciales verificarán

$$\gamma \neq \pm 1 \wedge \gamma \notin [u_1, u_2]$$

La segunda condición requiere que γ no pertenezca a la zona de movimiento de u , es decir

$$\gamma^2 > 1 \text{ o } (\alpha - a\gamma)(1 - \gamma^2) < 0$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 13 de 35

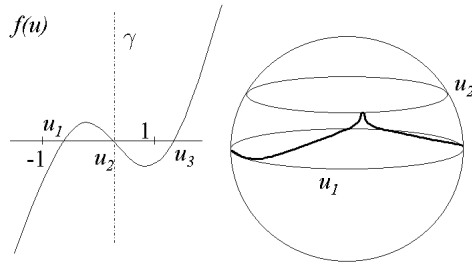


Figura 2: movimiento A.2.b

además de no verificar la condición 9. La descripción del movimiento es la siguiente. La variable $u(t)$ oscilará entre los valores u_1, u_2 recorriendo de forma periódica la zona de movimiento. A su vez, la precesión nunca cambiará de signo, pues para que esto sucediese es necesario que γ pertenezca a la zona de movimiento de u . Cuando u toma sus valores extremos $f(u)$ se anula y el ángulo λ se hace recto, es decir, la trayectoria del centro de masas es una curva contenida en una superficie esférica tangente a los paralelos $u = u_1, u = u_2$.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 14 de 35

3.3.3. A.2.b $\gamma = u_1, \gamma = u_2]$ MOVIMIENTO CON CUSPIDES

En este caso γ debe ser la primera o segunda raíz de $f(u)$.

$$f(\gamma) = (\alpha - a\gamma)(1 - \gamma^2) = 0 \Rightarrow \alpha - a\gamma = 0$$

La derivada de $f(u)$ en γ es

$$f'(\gamma) = -a(1 - \gamma^2) < 0$$

por lo tanto $\gamma = u_2$, es decir no puede ser la primera raíz. Las condiciones onciales deberán verificar

$$\gamma^2 < 1 \wedge f(\gamma) = 0$$

además de no verificar la condición 9. La descripción del movimiento es la siguiente. La variable $u(t)$ oscilará entre los valores $u_1, u_2 = \gamma$ recorriendo de forma periódica la zona de movimiento. A su vez, la precesión nunca cambiará de signo, pues para que esto sucediese es necesario que γ pertenezca a la zona de movimiento de u . Como en este caso es el valor máximo, la precesión se llegará a anular pero no se invertirá. Cuando u toma su valor inferior $f(u)$ se anula y el ángulo λ se hace recto, pero cuando $u = u_2 = \gamma$ el ángulo λ tiende a cero, con lo que la trayectoria del centro de asas corta perpendicularmente al paralelo $u = u_2$.

3.3.4. A.2.c $\gamma \in (u_1, u_2)$ MOVIMIENTO CON PRECESION ALTERNATIVA

En este caso las condiciones iniciales verificarán

$$\gamma \neq \pm 1 \wedge \gamma \in (u_1, u_2)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 15 de 35

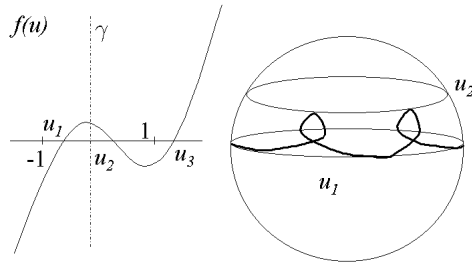


Figura 3: movimiento A.2.c

La segunda condición requiere que γ pertenezca a la zona de movimiento de u , es decir

$$\gamma^2 < 1 \wedge (\alpha - a\gamma)(1 - \gamma^2) > 0 \Rightarrow \alpha - a\gamma > 0$$

además de no verificar la condición 9. La descripción del movimiento es la siguiente. La variable $u(t)$ oscilará entre los valores u_1, u_2 recorriendo de forma periódica la zona de movimiento. A su vez, la precesión cambiará de signo cuando $u = \gamma$. Puede demostrarse que la precesión media tiene el mismo sentido que el de la precesión en el paralelo inferior $\dot{\varphi}_1 = b\omega_{z0} \frac{\gamma - u_1}{1 - u_1^2}$.

Cuando u toma sus valores extremos $f(u)$ se anula y el ángulo λ se hace recto, es decir, la trayectoria del centro de masas es una curva contenida en una superficie esférica tangente a los paralelos $u = u_1, u = u_2$.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 16 de 35

3.4. Movimientos polares (B)

En este caso, la condición es

$$\gamma = 1, \gamma = -1$$

por lo que se dividen en

- B.1. Movimientos cenitales. ($\gamma = 1$)
- B.2. Movimientos nadirales. ($\gamma = -1$)

B.1. Movimientos cenitales

En este caso, $f(1) = 0$ por lo que se puede tener en $u = 1$ una raíz simple (B.1.a) o múltiple (B.1.b). En el primer caso se tiene el *movimiento cenital general* que se estudia a continuación

3.4.1. B.1.a Movimiento cenital general

Suponiendo que $f(1) = 0$ siendo $u = 1$ una raíz simple, se puede pensar en que se trate de la primera, la segunda o la tercera raíz. La derivada de $f(u)$ en $u = 1$ es

$$f'(1) = -2(\alpha - a) = -2(\omega_x^2 + \omega_y^2) \leq 0$$

por lo que no puede tratarse de la primera raíz. Si fuese la tercera raíz, entonces el valor $u = 1$ no puede pertenecer a la zona del movimiento y éste tendría lugar en una zona interior al intervalo $(-1, 1)$ de forma análoga a



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 17 de 35

los casos A.1 y A.2.a. Si se trata de la segunda raíz, entonces la variable $u(t)$ evoluciona periódicamente entre los valores $u_1 \leq u \leq 1$.

Las condiciones iniciales deben cumplir

$$\gamma = 1 \quad \wedge \quad \alpha - a > 0$$

Cuando u tiende a uno, es decir cuando el trompo tiende a erguirse totalmente, la nutación $\dot{\theta}$ tiende al valor finito

$$\lim_{u \rightarrow 1} \dot{\theta} = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{\frac{f(u)}{1-u^2}} = \sqrt{\alpha - a}$$

y la precesión $\dot{\varphi}$ tiende a

$$\lim_{u \rightarrow 1} \dot{\varphi} = \frac{1}{2} b \omega_{z0}$$

aunque no está definida en $u = 1$ donde existe un salto brusco de φ de valor $\Delta\varphi = \pi$. Además, el ángulo λ

$$\lim_{u \rightarrow 1} tg\lambda = 0$$

lo que indica que el eje del trompo tiende al cénit según el meridiano. B.1.b $u = 1$ raíz doble. En este caso se puede tratar de 1) la primera y la segunda (movimiento cenital estacionario), 2) la segunda y la tercera (movimiento cenital asintótico) o 3) una raíz triple. B.1.b.1



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 18 de 35

3.4.2. B.1.b.1

Movimiento cenital estacionario En este caso $u_1 = u_2 = 1$ y por lo tanto debe cumplirse que $\alpha = a$ y el polinomio $f(u)$ queda

$$f(u) = (1 - u)^2(a(1 + u) - b^2\omega_{z0}^2)$$

y la raíz simple $u^* = \frac{b^2\omega_{z0}^2}{a} - 1$ por lo tanto, la relación entre las constantes iniciales es

$$\gamma = 1 \wedge \alpha = a \wedge \frac{b^2\omega_{z0}^2}{2a} > 0$$

En este caso el único valor posible de u es $u = 1$ con lo que el trompo permanece erguido girando en torno a su eje con rotación constante. B.1.b.2 Movimiento cenital asintótico En este caso $-1 < u_1 < u_2 = u_3 = 1$ Las condiciones iniciales han de verificar

$$\gamma = 1 \wedge \alpha = a \wedge \frac{b^2\omega_{z0}^2}{2a} < 0$$

y la zona del movimiento corresponde al intervalo $u \in (u_1, 1)$ Por tener $f(u)$ una raíz doble en $u = 1$ la integral

$$t - t_0 = \int_{u_0}^1 \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

es divergente, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 19 de 35

El trompo tiende asintóticamente a erguirse, aunque no lo consigue en tiempo finito. La nutación

$$\lim_{u \rightarrow 1} \dot{\theta} = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{\frac{f(u)}{1-u^2}} = 0$$

tiende a cero y la precesión $\dot{\varphi}$ tiende a

$$\lim_{u \rightarrow 1} \dot{\varphi} = \frac{1}{2} b \omega_{z0}$$

y el ángulo λ

$$\lim_{u \rightarrow 1} \text{tg} \lambda = \frac{b \omega_{z0}}{\sqrt{2a - b^2 \omega_{z0}^2}}$$

es decir el acercamiento al cénit se realiza mediante una trayectoria que tiende a ser una loxodromia.

3.4.3. B.1.b.3 $u_1 = u_2 = u_3 = 1$

En este caso se tiene la relación entre las condiciones iniciales

$$\gamma = 1 \wedge \alpha = a \wedge \frac{b^2 \omega_{z0}^2}{2a} = 0$$

El movimiento es una rotación uniforme en torno al eje del trompo que se mantiene permanentemente erguido.

B.2. Movimientos nadirales



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 20 de 35

En estos movimientos el trompo pasa por la posición vertical inferior $u = -1$. Se caracterizan porque

$$f(-1) = 0 \Rightarrow \gamma = -1$$

Según que $u = -1$ sea una raíz simple o doble de $f(u)$ se tienen los casos

- raíz simple, movimiento nadiral general (B.2.a)
- raíz doble, movimiento nadiral estacionario (B.2.b)

3.4.4. B.2.a Movimiento nadiral general

En este caso $u = -1$ es una raíz simple de $f(u)$ por lo que

$$f'(-1) = 2(\alpha + a) \neq 0 \Rightarrow f'(-1) > 0$$

y $u = -1$ debe ser la primera raíz de $f(u)$. La relación entre las condiciones iniciales del movimiento deberá ser

$$\gamma = -1 \wedge \alpha + a > 0$$

En cuanto a la descripción del movimiento, éste tendrá lugar entre los valores de $-1 \leq u \leq u_2$. La nutación verifica

$$\lim_{u \rightarrow 1} \dot{\theta} = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{\frac{f(u)}{1 - u^2}} = \sqrt{\alpha + a}$$

y la precesión $\dot{\varphi}$ tiende a

$$\lim_{u \rightarrow 1} \dot{\varphi} = -\frac{1}{2}b\omega_{z0}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 21 de 35

aunque no está definida en $u = -1$ donde existe un salto brusco de φ de valor $\Delta\varphi = \pi$. Además, el ángulo λ

$$\lim_{u \rightarrow -1} \operatorname{tg} \lambda = 0$$

es decir se tiende a la posición nadiral con una trayectoria tangente al meridiano.

3.4.5. B.2.b Movimiento nadiral estacionario

En este caso, $u = -1$ es una raíz doble de $f(u)$ y sólo puede ser $u_1 = u_2 = -1 < 1 < u_3$

La relación que debe darse entre las constantes iniciales del movimiento para que éste sea del tipo indicado es

$$\gamma = -1 \wedge \alpha + a = 0$$

El movimiento consiste en un giro uniforme en torno al eje de revolución del trompo que está en dirección vertical con el centro de masas en la posición inferior.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 22 de 35

4. Caso de rotación inicial propia

Un caso particularmente sencillo de problema se presenta cuando las condiciones iniciales consisten en una rotación alrededor del eje z . En este caso

$$\dot{\theta}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0 \wedge \dot{\psi}_0 = \omega_{z0}$$

En este caso se evalúan los parámetros α, β, γ

$$\beta = b\omega_{z0}u_0\gamma = u_0$$

$$\alpha = au_0$$

con lo que

$$f(u) = (u - u_0)(a(1 - u^2) - b^2\omega_{z0}^2(u - u_0))$$

Se tiene que $u = u_0$ es una raíz de $f(u)$ y además $u_0 = \gamma$ con lo que estamos ante un caso del tipo de movimiento con cúspides (A.2.b). Por lo tanto $u_0 = u_2 = \gamma$ y el movimiento del trompo tiene lugar entre los valores $u_1 \leq u \leq u_0$ con lo que el trompo comienza a bajar hasta que $u = u_1$ cuando comienza a ercuperar altura hasta llegar de nuevo a $u = u_0$. Despejando $u_0 - u_1$ se tiene

$$u_0 - u_1 = \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2\omega_{z0}^2}$$

si $\frac{a}{b^2\omega_{z0}^2} \ll 1$, es decir, si la energía cinética inicial es mucho mayor que las posibles variaciones en la potencial,

$$u_0 - u_1 \simeq 0$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 23 de 35

y la zona del movimiento es una franja muy estrecha bajo u_0 . Realizando el cambio de variable $y = u_0 - u$ queda

$$\dot{y}^2 = \dot{u}^2 = y(a(1 - u_0^2) - b^2\omega_{z0}^2 y)$$

y derivando

$$2y\dot{y} = a(1 - u_0^2)\dot{y} - 2b^2\omega_{z0}^2 y\dot{y} \Rightarrow \dot{y} + b^2\omega_{z0}^2 y = \frac{a(1 - u_0^2)}{2}$$

y la solución para $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{a(1 - u_0^2)}{2b^2\omega_{z0}^2} (1 - \cos b\omega_{z0}t)$$

$$u(t) = u_0 - \frac{a(1 - u_0^2)}{2b^2\omega_{z0}^2} (1 - \cos b\omega_{z0}t)$$

y la precesión $\dot{\varphi}$ es

$$\dot{\varphi} = b\omega_{z0} \frac{u - u_0}{1 - u_0^2}$$

sustituyendo

$$\dot{\varphi} = b\omega_{z0} \frac{\frac{a(1-u_0^2)}{2b^2\omega_{z0}^2} (1 - \cos b\omega_{z0}t)}{1 - u_0^2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{2b\omega_{z0}} (1 - \cos b\omega_{z0}t)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 24 de 35

con lo que se tiene un movimiento de nutación rápido de pulsación $b\omega_{z0}$ en una estrecha banda (u_1, u_0) . Además, la precesión varía entre un valor máximo $\frac{a}{b\omega_{z0}}$ en u_1 y un valor nulo en u_0 . El valor medio de la precesión es

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{a}{2b\omega_{z0}}$$

lo que determina un periodo de revolución de

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\langle \dot{\varphi} \rangle} = 4\pi \frac{b\omega_{z0}}{a}$$

que comparado con el periodo de la nutación

$$T_\theta = \frac{2\pi}{b\omega_{z0}}$$

$$\frac{T_\theta}{T_\varphi} = \frac{a}{2b^2\omega_{z0}^2} \ll 1$$

es decir el número de cúspides en cada paralelo es muy elevado, razón por la cual se puede confundir este movimiento con el estacionario.



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 25 de 35

5. Sentido de la precesión en el caso A.2.c

En el movimiento con precesión alternativa (A.2.c) el eje del trompo, como ya se ha visto, realiza bucles como consecuencia del carácter alternativo de la precesión. Estos bucles siguen la regla:

El sentido de la precesión media siempre corresponde al que tiene la precesión instantánea cuando el centro de masas se encuentra en la posición inferior.

En esta sección se va a demostrar este resultado. Aunque existe una deducción analítica directa, que se da más adelante, se introduce la demostración basada en la comparación del trompo pesado con el inercial, por considerar que aporta una visión más intuitiva del problema .

5.1. Comparación del trompo pesado descendente con el inercial

En primer lugar, se realiza una pequeña transformación en el formato de las ecuaciones para el trompo pesado. La constante α , responde en realidad a una constante sobre la energía del instante inicial considerado. Esta procede de la energía cinética y la potencial, y puede parecer interesante el separar la que procede de la energía cinética en una constante nueva. Por ello, realizaremos el cambio:

$$\alpha = \omega_{x2}^2 + \omega_{y2}^2 + \frac{2mg\zeta u_2}{I_x}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 26 de 35

$$\alpha = \nu_2^2 + a u_2$$

$$\nu_2^2 = \omega_{x_2}^2 + \omega_{y_2}^2$$

con lo que llamando

$$f(u) = \nu_2^2(1 - u^2) - b^2\omega_{z_0}^2(\gamma - u)^2 + a(u_2 - u)(1 - u^2)$$

queda:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = b\omega_{z_0} \frac{\gamma - u}{1 - u^2}$$

pero $u > \gamma$, por lo que es más expresivo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -b\omega_{z_0} \frac{u - \gamma}{1 - u^2}$$

para el trompo inercial se tiene:

$$f_2(u) = \nu_2^2(1 - u^2) - b^2\omega_{z_0}^2(\gamma - u)^2$$

y por tanto:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f_2(u)$$

y la precesión queda con una forma igual a la del trompo pesado:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -b\omega_{z_0} \frac{u - \gamma}{1 - u^2}$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 27 de 35

donde podemos constatar que :

$$f(u_2) = 0 \Rightarrow f_2(u_2) = 0$$

$$f_2(\gamma) > 0$$

y que :

$$u < u_2 \Rightarrow f_2(u) < f(u)$$

por lo que queda demostrado que

1. El cono $u = u_2$ es extremo del movimiento del trompo inercial.
2. El trompo inercial baja por lo menos hasta el cono $u = \gamma$.
3. El trompo pesado cae más abajo que el inercial.

Comparemos la excursión en φ que realizan ambos trompos hasta llegar a la cota $u = \gamma$.

$$\Delta\varphi_{pesado} = -b\omega_{z_0} \int_{\gamma}^{u_2} \frac{u - \gamma}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

$$\Delta\varphi_{inercial} = -b\omega_{z_0} \int_{\gamma}^{u_2} \frac{u - \gamma}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f_2(u)}}$$

pero como $f(u) > f_2(u)$ entonces:

$$|\Delta\varphi_{pesado}| < |\Delta\varphi_{inercial}|$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 28 de 35

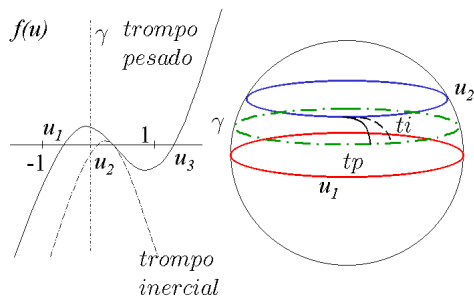


Figura 4: comparación del trompo pesado con el inercial en el movimiento descendente

por lo tanto, podemos representar en la figura 4 las trayectorias del eje del trompo pesado y el inercial, hasta que llegan a $u=\gamma$. Para ello, dibujaremos la trayectoria de la intersección de estos ejes con una esfera, cuyo radio podemos tomar como unidad de longitud, siendo más amplia la precesión del inercial.

5.2. Comparación con el trompo inercial ascendente

En este apartado partimos de la posición más baja del trompo pesado ($u = u_1$). Con las condiciones iniciales de velocidad que tiene en ella el trompo pesado, dotamos a un trompo inercial de la misma geometría de masas que el pesado. Veremos que a partir de la posición más baja del



DFAIL
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 29 de 35

centro de masas, la evolución del trompo pesado será más lenta que la del inercial, y describirá una precesión más amplia. Este resultado, junto con el del apartado anterior, serán los resultados fundamentales que discutiremos en el siguiente apartado.

También nos vendrá bien el realizar el cambio de constante, de la forma:

$$\alpha = \omega_x l^2 + \omega_y l^2 + \frac{2mg\zeta u_{sub1}}{I_x}$$

$$\alpha = \nu_1^2 + au_1$$

$$\nu_1^2 = \omega_{x1}^2 + \omega_{y1}^2$$

con lo que llamando

$$f(u) = \nu_1^2(1 - u^2) - b^2\omega_{z_0}^2(\gamma - u)^2 - a(u - u_1)(1 - u^2)$$

queda:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = b\omega_{z_0} \frac{\gamma - u}{1 - u^2}$$

para el trompo inercial tenemos:

$$f_1(u) = \nu_1^2(1 - u^2) - b^2\omega_{z_0}^2(\gamma - u)^2$$

y por tanto:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f_1(u)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 30 de 35

y la precesión queda con una forma igual a la del trompo pesado:

$$\frac{d\varphi}{dt} = b\omega_{z_0} \frac{\gamma - u}{1 - u^2}$$

donde podemos constatar que :

$$f(u_1) = 0 \Rightarrow f_1(u_1) = 0$$

$$f_1(\gamma) > 0$$

y que :

$$u > u_1 \Rightarrow f_1(u) > f(u)$$

por lo que queda demostrado el que :

1. El cono $u = u_1$ es extremo del movimiento del trompo inercial.
2. El trompo inercial sube por lo menos hasta el cono $u = \gamma$.
3. El trompo pesado sube menos que el trompo inercial.

Comparemos la excursión en φ que realizan ambos trompos hasta llegar a la cota $u = \gamma$.

$$\Delta\varphi_{\text{pesado}} = b\omega_{z_0} \int_{u_1}^{\gamma} \frac{\gamma - u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

$$\Delta\varphi_{\text{inercial}} = b\omega_{z_0} \int_{u_1}^{\gamma} \frac{\gamma - u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f_2(u)}}$$



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 31 de 35

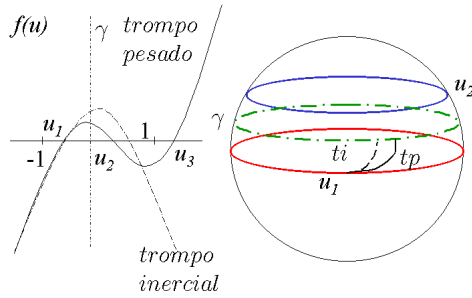


Figura 5: comparación del trompo pesado con el inercial en el movimiento ascendente

pero como $f(u) < f_1(u)$ entonces:

$$|\Delta\varphi_{\text{pesado}}| > |\Delta\varphi_{\text{inercial}}|$$

por lo tanto, podemos representar en la figura 5 las trayectorias del eje del trompo pesado y el inercial, hasta que llegan a $u = \gamma$. Para ello, dibujaremos la trayectoria de la intersección de estos ejes con una esfera, cuyo radio podemos tomar como unidad.

5.3. Combinación de los dos movimientos anteriores

Tenemos dividida la excursión del ángulo azimutal $\Delta\varphi$ del trompo pesado, en sus dos tramos, el de precesión negativa y el de precesión positiva.



DFAIL
M_εcFunN_εt

Título	
Contenido	
◀◀	▶▶
◀	▶
Volver Atrás	
Cerrar	
Salir	
Página 32 de 35	

La amplitud del tramo negativo la hemos acotado superiormente por la excursión del trompo inercial número 2, y la amplitud del tramo positivo, la tenemos acotada inferiormente por la del trompo inercial número 1. Si vemos que la amplitud de la precesión del trompo inercial número 2 es necesariamente menor que la del trompo inercial número 1, sabremos que la precesión neta del trompo pesado será siempre positiva. Tenemos reducida la discusión a la comparación entre dos trompos inerciales, de los cuales conocemos que sus ejes describirán conos de revolución, y sus intersecciones con la esfera de radio unidad serán siempre circunferencias.

Para el trompo inercial número 2, sabemos que esta circunferencia será tangente a la circunferencia horizontal de cota $u = u_2$, y además vimos que bajará menos que el trompo pesado, por lo que su menor cota vendrá dada por un $u'_2 > u_1$.

Para el trompo inercial número 1, sabemos que esta circunferencia será tangente a la circunferencia horizontal de cota $u = u_1$, y además vimos que subirá más que el trompo pesado, por lo que su cota superior vendrá dada por un $u'_1 > u_2$

Entonces la circunferencia del trompo inercial número 1 envolverá necesariamente a la del número 2, como se muestra en la figura 4, y la excursión de φ en el trompo inercial número 1 será mayor que la del número 2, con lo que queda demostrado el que la precesión neta será positiva.

5.4. Matemática subyacente

Por debajo del razonamiento matemático anterior, podemos aportar un razonamiento matemático homólogo, que refleje todos sus pasos.



DFAII
M_ecFunN_et

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 33 de 35

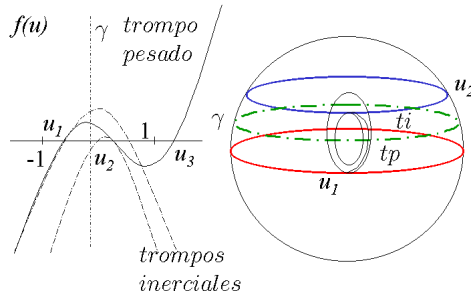


Figura 6: comparación del trompo pesado con el inercial

Notemos, que al reducir el problema a la comparación de dos movimientos inerciales, eludimos el trato de integrales elípticas, manejando integrales irracionales de segundo grado, para las que existe un camino típico de integración. Veamos:

$$\Delta\varphi = b\omega_{z_0} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\gamma - u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

$$\Delta\varphi = b\omega_{z_0} \left(\int_{u_1}^{\gamma} \frac{\gamma - u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} - \int_{\gamma}^{u_2} \frac{u - \gamma}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \right)$$

$$\Delta\varphi > b\omega_{z_0} \left(\int_{u_1}^{\gamma} \frac{\gamma - u}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f_1(u)}} - \int_{\gamma}^{u_2} \frac{u - \gamma}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{f_2(u)}} \right)$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 34 de 35

integrando:

$$\Delta\varphi > b\omega_{z_0} \left(\arcsen \frac{\nu_1}{\sqrt{\nu_1^2 + (1+\gamma)(1-\gamma)}} - \arcsen \frac{\nu_2}{\sqrt{\nu_2^2 + (1+\gamma)(1-\gamma)}} \right)$$

teniendo en cuenta que

$$\nu_1^2 - \nu_2^2 = a(u_2 - u_1) > 0$$

y la función

$$g(\nu) = \arcsen \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + (1+\gamma)(1-\gamma)}}$$

es creciente en ν , tenemos el resultado buscado

$$\Delta\varphi > 0$$



DFAII
M_εcFunN_εt

Título

Contenido



Volver Atrás

Cerrar

Salir

Página 35 de 35