Geometría de masas

M$_\epsilon$cFunN$_\epsilon$t

Contenido

1 Características de inercia de un sólido 3

2 Distribuciones de masas 4

3 Momentos estáticos 6

4 Momentos de inercia 11

5 Tensor y elipsoide de inercia 17

6 Simetrías en la distribución 22

7 Ejes de los elipsoides de inercia 24

8 Clasificación de las rectas 26

9 Clasificación de los planos 32

10 Clasificación de las direcciones 36

1. Características de inercia de un sólido

Considerando la mecánica como la ciencia que se ocupa del estudio de la evolución de los sistemas materiales y las causas que la producen, podemos preguntarnos sobre los aspectos o parámetros del sólido que tienen transcendencia en el ámbito de la mecánica. Si centramos el objeto de nuestro estudio en el sólido rígido, entonces su evolución viene determinada por la cinemática de los sistemas indeformables. Además, adelantando un resultado de Dinámica, las causas que producen la evolución del sólido rígido pueden ser encajadas en los sistemas de vectores deslizantes. Queda, por tanto, el estudio de la relación entre el movimiento del sólido y sus causas. En esta relación intervienen las propias características de cada sólido y, de éstas, sólo los momentos de órdenes cero, uno y dos. Dicho de otra forma, la única información necesaria para relacionar los sistemas de fuerzas que actúan sobre un sólido con la evolución posterior de éste son los momentos de orden hasta el segundo de dicho sólido. En [1] se analiza ampliamente esta relación y en estas notas se presenta y desarrolla el tratamiento de estos momentos, que es lo que se conoce tradicionalmente como *Geometría de masas*.

2. Distribuciones de masas

Desde el punto de vista de la mecánica racional, un sólido rígido es un ente ideal compuesto por un conjunto de puntos materiales que mantienen sus distancias mutuas durante su evolución. Dicho conjunto de puntos materiales puede estar compuesto por masas finitas, constituyendo un conjunto *discreto*, por distribuciones volúmicas, superficiales o lineales, en cuyo caso recibe el nombre de *continuo*, o bien, pueden existir puntos de masa finita y distribuciones continuas en un mismo sólido.

En sistemas discretos, puede suponerse la existencia de un conjunto finito de n puntos P_i de masa m_i posicionados respecto a un origen O por su vector de posición $\boldsymbol{OP}_i = \boldsymbol{r}_i \quad i \in \{1 \ldots n\}$. La masa total, M del sólido es

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

En sistemas continuos no puede hablarse de la existencia de una masa finita en cada punto, sino de una densidad de masa, ya sea volúmica (ρ), superficial (σ) o lineal (λ). Según sea el caso, la masa total vendrá dada por un integral volúmica, de superficie o de línea:

$$\begin{aligned} M &= \int \rho \mathrm{d}V \\ M &= \int \sigma \mathrm{d}S \\ M &= \int \lambda \mathrm{d}\ell \end{aligned}$$

La definición de momentos de distribuciones de masas utiliza sumatorios o integrales de los tipos anteriores para extender una suma a un conjunto

discreto o continuo de puntos. Con objeto de no repetir definiciones en cada uno de los cuatro casos anteriores, se asumirá una distribución volúmica. Los sumatorios y las integrales de superficie y de línea pueden reducirse a integrales volúmicas con la introducción de funciones basadas en la δ de Dirac.

3. Momentos estáticos

Dado un punto O, que se toma como origen de coordenadas, se define como momento estático $\boldsymbol{\mathcal{M}}_O$ respecto a O al vector:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_O = \int \boldsymbol{OP}\rho \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{r}\rho \mathrm{d}V$$

Una distribución cualquiera de masas, por tanto, define un campo de vectores $\boldsymbol{\mathcal{M}}_O$ en cada punto O del espacio. Veamos a continuación la relación entre los momentos estáticos de una distribución de masas respecto a dos puntos O y O' cualesquiera.

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_{O'} = \int \boldsymbol{O'P}\rho \mathrm{d}V = \int (\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OP})\rho \mathrm{d}V =$$

$$-\int \boldsymbol{OO'}\rho \mathrm{d}V + \int \boldsymbol{OP}\rho \mathrm{d}V = \boldsymbol{\mathcal{M}}_O - M\boldsymbol{OO'} \tag{1}$$

es decir, la diferencia entre los momentos estáticos de una distribución respecto a dos puntos O y O' cualesquiera es el producto de la masa por el vector $\boldsymbol{OO'}$.

Se define *centro de masas* de una distribución al punto respecto al cual el momento estático es nulo. Llamaremos C a este punto, cuya existencia y unicidad está garantizada , pues, por la ecuación (1), se obtiene:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_C = \mathbf{0} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_O - M\boldsymbol{OC} \iff \boldsymbol{OC} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{M}}_O}{M}$$

lo que permite posicionar el centro de masas C de una distribución conocido el momento estático respecto a un punto cualquiera y la masa.

Ya se ha citado que una distribución de masas define un campo de momentos estáticos. Puede utilizarse la ecuación (1) para visualizar la forma de este campo. En efecto, $\boldsymbol{\mathcal{M}}_O = M\boldsymbol{OC}$ por lo que se trata de un campo central emergente con simetría radial, lineal con la distancia al centro de masas.

Al igual que se ha definido el momento estático respecto a un punto, se puede definir el momento estático respecto a una recta. La posición relativa entre dos puntos viene dada por el vector que los une, sin embargo la posición relativa de un punto P respecto a una recta viene determinada por el vector perpendicular a esta última que tiene como origen uno de sus puntos y como extremo el punto P . La expresión analítica de este vector es, según se explica en [2], $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{u})$, siendo O un punto de la recta y $\boldsymbol{u}$ un vector unitario de su misma dirección. El momento estático respecto a una recta δ se define,

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_\delta = \int \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{u})\rho \mathrm{d}V$$

Para que esta definición sea correcta, el momento estático no debe depender ni del sentido elegido para el vector $\boldsymbol{u}$ ni de la elección del punto O sobre la recta. Evidentemente, la elección del sentido de $\boldsymbol{u}$, al aparecer éste multiplicando dos veces el integrando, no influye en el resultado de la integral. En cuanto a la elección del punto O, supondremos que se ha elegido un punto O' y veremos que el resultado obtenido es el mismo. Dado

que $O, O' \in \delta \Rightarrow \boldsymbol{O'O} = \lambda \boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{O'P} = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OP}$ Por lo que

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}'_\delta = \int \boldsymbol{u} \times ((\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OP}) \times \boldsymbol{u}) \mathrm{d}V =$$

$$\int \boldsymbol{u} \times ((\lambda \boldsymbol{u} + \boldsymbol{OP}) \times \boldsymbol{u}) \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{u}) \mathrm{d}V = \boldsymbol{\mathcal{M}}_\delta$$

Puede relacionarse el momento estático respecto a una recta con el momento estático respecto a uno cualquiera de sus puntos.

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_\delta = \int \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{u}) \mathrm{d}V = \boldsymbol{u} \times [(\int \boldsymbol{OP} \mathrm{d}V) \times \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u} \times [\boldsymbol{\mathcal{M}}_O \times \boldsymbol{u}]$$

Es decir, el momento estático respecto a una recta es la proyección sobre el plano perpendicular a dicha recta del momento estático respecto a cualquiera de sus puntos. Además, ya que $\boldsymbol{OC} = \dfrac{\boldsymbol{\mathcal{M}}_O}{M}$, se concluye que el centro de masas se encuentra sobre una recta paralela a δ desplazada respecto a ésta el vector $\dfrac{\boldsymbol{\mathcal{M}}_\delta}{M}$. Si la recta δ contiene a C, entonces, obviamente, $\boldsymbol{\mathcal{M}}_\delta = \boldsymbol{0}$.

De la misma forma que se ha definido el momento estático para rectas, se puede definir para planos. Sea π un plano, $\boldsymbol{u}$ un vector unitario perpendicular y O un punto de π. Se define el momento estático respecto al plano π como:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_\pi = \int (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{OP}) \boldsymbol{u} \rho \mathrm{d}V$$

Esta definición no debe depender de la elección del sentido de $\boldsymbol{u}$ ni de la del punto O. En efecto, la aparición del vector multiplicando dos veces en

el integrando hace que éste no dependa del sentido de $\boldsymbol{u}$. En cuanto a la elección de O, sea $O' \in \pi$:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}'_\pi = \int (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{O'P})\boldsymbol{u}\rho \mathrm{d}V = \int (\boldsymbol{u} \cdot [\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OP}])\boldsymbol{u}\rho \mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}'_\pi = \int (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{OP})\boldsymbol{u}\rho \mathrm{d}V = \boldsymbol{\mathcal{M}}_\pi$$

ya que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{O'O} = 0$ pues O, O' pertenecen a π.

Se comprueba que

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_\pi = \int (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{OP})\boldsymbol{u}\rho \mathrm{d}V = (\boldsymbol{u} \cdot [\int \boldsymbol{OP}\rho \mathrm{d}V])\boldsymbol{u}$$

es decir, que el momento estático respecto a un plano es la proyección perpendicular al mismo del momento estático respecto a cualquiera de sus puntos. Igualmente, el momento estático respecto a un plano proporciona información sobre la posición del centro de masas respecto a dicho plano. En efecto, si el momento estático respecto a π de una distribución de masas es $\boldsymbol{\mathcal{M}}_\pi$, entonces C se encuentra en un plano paralelo al anterior, desplazado $\dfrac{\boldsymbol{\mathcal{M}}_\pi}{M}$ y, si $C \in \pi \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{M}}_\pi = \boldsymbol{0}$.

Dado que si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son tres vectores unitarios perpendiculares, se tiene:

$$\boldsymbol{OP} = (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$$

se tiene que

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_O = (\boldsymbol{\mathcal{M}}_{yz} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{\mathcal{M}}_{zx} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{\mathcal{M}}_{xy} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{M}}_O = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{yz} + \boldsymbol{\mathcal{M}}_{zx} + \boldsymbol{\mathcal{M}}_{xy}$$

es decir, el momento estático respecto a un punto es la suma de los momentos estáticos respecto a tres planos mutuamente perpendiculares que pasen por dicho punto.

Por otra parte, dado que

$$\boldsymbol{OP} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{j} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{k})]$$

se tiene que

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_O = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathcal{M}}_x + \boldsymbol{\mathcal{M}}_y + \boldsymbol{\mathcal{M}}_z]$$

es decir, el momento estático respecto a un punto es la semisuma de los momentos estáticos respecto a tres rectas mutuamente perpendiculares que pasen por dicho punto.

Se puede completar la relación anterior aña diendo la relación entre los momentos estáticos respecto a rectas y planos. En efecto, dado que

$$\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{OP})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{OP})\boldsymbol{k}$$

se tiene que

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}_x = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{zx} + \boldsymbol{\mathcal{M}}_{xy}$$

es decir, el momento estático respecto a una recta es la suma de los momentos estáticos respecto a dos planos mutuamente perpendiculares que la contengan.

4. Momentos de inercia

Los momentos estáticos tratados en la sección anterior se conocen también como momentos de primer orden, ya que las distancias de los puntos másicos a los elementos respecto a los que están definidos intervienen con exponente uno (el momento de orden cero sería la masa total de la distribución). Como hemos dicho en la introducción, nos interesan los momentos de hasta el segundo orden. Estos se denominan momentos de inercia e intervienen en casi todas las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido. Al igual que los momentos estáticos, se definen respecto a puntos, rectas y planos y, a diferencia de aquéllos, también se definen respecto a pares de planos. Comencemos por los momentos de inercia respecto a puntos o momentos de inercia centrales.

Dado un punto O, se define el momento de inercia respecto a O, y se denotará I_O, a:

$$I_O = \int \mathrm{nor}(\boldsymbol{OP})\rho \mathrm{d}V$$

El momento de inercia será siempre, por su definición, mayor que cero (excepto en el caso de una masa puntual respecto al punto en que esté concentrada, en cuyo caso sería nulo. Puede relacionarse el momento de inercia respecto a un punto O cualquiera con el momento de inercia respecto al centro de masas C.

$$I_O = \int \mathrm{nor}(\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{CP})\rho \mathrm{d}V = \int [\mathrm{nor}(\boldsymbol{OC})+2\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{CP}+\mathrm{nor}(\boldsymbol{CP})]\rho \mathrm{d}V =$$

$$= \mathrm{nor}(\boldsymbol{OC}) \int \rho \mathrm{d}V + I_C + 2\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}_C$$

Pero como $\boldsymbol{\mathcal{M}}_C = \mathbf{0}$, se tiene

$$I_O = M\,\mathrm{nor}(\boldsymbol{OC}) + I_C$$

lo que indica que el momento de inercia central es mínimo en el centro de masas y se incrementa respecto a éste en el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre C y O.

Los momentos de inercia más útiles son los que se definen respecto a rectas. Sean una recta δ, un vector unitario paralelo a ella $\boldsymbol{u}$ y uno de sus puntos O. Se define el momento de inercia I_δ respecto a δ como

$$I_\delta = \int \mathrm{nor}(\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{u})\rho \mathrm{d}V$$

La definición anterior es correcta, pues no depende ni del sentido asignado a $\boldsymbol{u}$ (neutralizado por la norma), ni de la elección de O, ya que cualquier otro punto definiría un vector $\boldsymbol{O'P} = \lambda\boldsymbol{u} + \boldsymbol{OP}$ que multiplicado vectorialmente por $\boldsymbol{u}$ daría el mismo resultado.

El momento de inercia será siempre positivo, excepto si la distribución de masas está contenida en la recta δ, en cuyo caso es nulo.

Se puede relacionar el momento de inercia de una distribución cualquiera de masas respecto a una recta δ con el correspondiente respecto a una recta $\delta_C$paralela a δ que contenga al centro de masas.

$$I_\delta = \int \mathrm{nor}[(\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{CP}) \times \boldsymbol{u}]\rho \mathrm{d}V =$$

$$= \int [\mathrm{nor}(\boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{CP} \times \boldsymbol{u}) + \mathrm{nor}(\boldsymbol{CP} \times \boldsymbol{u})]\rho \mathrm{d}V =$$

$$= \mathrm{nor}(\boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{u}) \int \rho \mathrm{d}V + I_{\delta_C} + 2(\boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{\mathcal{M}}_C \times \boldsymbol{u})$$

Pero como $\boldsymbol{\mathcal{M}}_C = \boldsymbol{0}$, se tiene

$$I_\delta = M\,\mathrm{nor}(\boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{u}) + I_{\delta_C}$$

El primer sumando del segundo miembro de la expresión anterior es el producto de la masa por el cuadrado de la distancia del centro de masas a δ (o, si se prefiere, la distancia entre δ y δ_C). Esta ecuación se conoce como *fórmula de Steiner*. De ella se deduce que de todas las rectas paralelas a una dada, la que menor momento de inercia presenta es la que pasa por el centro de masas.

Se suele definir el radio de giro k_δ de una distribución de masas respecto a la recta δ como el radio de un cilindro de revolución de eje δ, homogéneo y de masa igual a la de la distribución original que defina el mismo momento de inercia respecto a δ. Por lo tanto,

$$k_\delta = \sqrt{\frac{I_\delta}{M}}$$

Sean un plano π , un vector unitario perpendicular $\boldsymbol{u}$ y un punto O contenido en π. Se define el momento de inercia respecto a π como:

$$I_\pi = \int (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{u})^2 \rho \mathrm{d}V$$

que es, obviamente, independiente del sentido de $\boldsymbol{u}$ y de la elección de O, ya que otro punto O' haría $\boldsymbol{O'P} = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OP}$ y $\boldsymbol{O'O} \cdot \boldsymbol{OP} = 0$. El momento

I_π será positivo excepto si la distribución de masas está contenida en el plano π en cuyo caso sería nulo.

Se puede relacionar el momento de inercia de una distribución cualquiera de masas respecto a un plano π con el correspondiente respecto a un plano $\pi_C$paralelo a π que contenga al centro de masas.

$$I_\pi = \int [(\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{CP})\cdot\boldsymbol{u}]^2 \rho \mathrm{d}V = \int [(\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{u})^2 + 2(\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{CP}\cdot\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{CP}\cdot\boldsymbol{u})^2]\rho \mathrm{d}V =$$

$$= (\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{u})^2 \int \rho \mathrm{d}V + I_{\pi_C} + 2(\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\mathcal{M}}_C\cdot\boldsymbol{u})$$

Pero como $\boldsymbol{\mathcal{M}}_C = \boldsymbol{0}$, se tiene

$$I_\pi = M(\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{u})^2 + I_{\pi_C}$$

El primer sumando del segundo miembro de la expresión anterior es el producto de la masa por el cuadrado de la distancia del centro de masas a π (o, si se prefiere, la distancia entre π y π_C). De esta ecuación se deduce que de todos los planos paralelos a uno dado, el que menor momento de inercia presenta es el que pasa por el centro de masas.

Finalmente, se define el *producto de inercia* respecto al par de planos orientados π, π'. Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}'$ dos vectores unitarios normales a π y π' congruentes con sus respectivas orientaciones. Sean asímismo O, O' dos puntos de π y π' respectivamente. Se define el producto de inercia

$$P_{\pi\pi'} = \int (\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'P}\cdot\boldsymbol{u}')\rho \mathrm{d}V$$

que no depende de la elección de O, O' ya que $\boldsymbol{OP}, \boldsymbol{O'P}$ están multiplicados escalarmente por $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{u}'$ respectivamente. Evidentemente, el producto de inercia es simétrico respecto a los planos que lo definen. A diferencia de los momentos de inercia respecto a puntos, rectas o planos, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o nulo.

Se puede relacionar el producto de inercia de una distribución cualquiera de masas respecto a un par de planos π, π' con el correspondiente a un par de planoa paralelos π_C, π'_C que pasen por el centro de masas.

$$P_{\pi,\pi'} = \int (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'P} \cdot \boldsymbol{u}')\rho \mathrm{d}V =$$

$$= \int (\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'C} + \boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{u}')\rho \mathrm{d}V =$$

$$\int [(\boldsymbol{OC} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'C} \cdot \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{OC} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{u}') +$$

$$+(\boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'P} \cdot \boldsymbol{u}') + (\boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{CP} \cdot \boldsymbol{u}')]\rho \mathrm{d}V$$

Pero como $\boldsymbol{\mathcal{M}}_C = \boldsymbol{0}$, se tiene

$$P_{\pi\pi'} = M(\boldsymbol{OC} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'C} \cdot \boldsymbol{u}') + P_{\pi_C \pi'_C}$$

El primer sumando del segundo miembro de la expresión anterior es el producto de la masa por el producto de las distancias con signo desde los planos orientados al centro de masas (o, si se prefiere, el producto de las distancias de π a π_C y de π' a π'_C).

Si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ son tres vectores unitarios perpendiculares, se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{nor} \boldsymbol{OP} &= (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{i})^2 + (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{j})^2 + (\boldsymbol{OP} \cdot \boldsymbol{k})^2 \\ \operatorname{nor} \boldsymbol{OP} &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{nor}(\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{i}) + \operatorname{nor}(\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{j}) + \operatorname{nor}(\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{k})]\end{aligned}$$

se tiene que

$$I_O = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \frac{I_x + I_y + I_z}{2}$$

y que

$$I_x = \frac{I_{zx} + I_{xy}}{2}$$

5. Tensor y elipsoide de inercia

Si el vector unitario $\boldsymbol{u}$ y el vector $\boldsymbol{OP}$ se expresan por sus componentes en una base ortonormal $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, se tiene:

$$\begin{gathered}
\operatorname{nor}(\boldsymbol{OP}\times\boldsymbol{u}) = \operatorname{nor}\boldsymbol{OP}\operatorname{nor}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{u})^2 = \\
= (x^2+y^2+z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = \\
x^2(1-\cos^2\alpha) + y^2(1-\cos^2\beta) + z^2(1-\cos^2\gamma) - \\
-2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta = \\
= x^2(\cos^2\beta+\cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha) + z^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta) - \\
-2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta = \\
= \cos^2\alpha(y^2+z^2) + \cos^2\beta(z^2+x^2) + \cos^2\gamma(x^2+y^2) - \\
-2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta
\end{gathered}$$

Por lo que, si δ es una recta paralela a $\boldsymbol{u}$ que pasa por O, se tiene

$$\begin{gathered}
I_\delta = \int [\cos^2\alpha(y^2+z^2) + \cos^2\beta(z^2+x^2) + \cos^2\gamma(x^2+y^2) - \\
-2yz\cos\beta\cos\gamma - 2zx\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta]\rho\mathrm{d}V =
\end{gathered}$$

$$I_\delta = \cos^2\alpha I_x + \cos^2\beta I_y + \cos^2\gamma I_z - 2\cos\beta\cos\gamma P_{yz} - 2\cos\gamma\cos\alpha P_{zx} - 2\cos\alpha\cos\beta P_{xy} \tag{2}$$

La expresión (2) representa una función cuadrática en $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ que se puede representar de la forma:

$$I_\delta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{zx} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \tag{3}$$

I_δ es un escalar, $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix}$ son las componentes del vector $\boldsymbol{u}$ y la matriz

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{zx} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

representa las componentes en forma matricial simétrica de la función cuadrática $I_\delta(\boldsymbol{u})$. Por lo tanto [1] , la expresión

$$\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{zx} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

representa una función vectorial de variable vectorial. Por consiguiente, las matriz M que representa esta función cambia sus componentes al cambiar de base de referencia según las fórmulas de cambio de base ortonormal:

$$M' = TMT'$$

[1] según los resultados del Algebra Lineal, una forma cuadrática determina un tensor o diádica simétrica, la cual, a su vez, define una función vectorial lineal

y representa las componentes del *tensor o diádica de inercia*.

El concepto de tensor traduce la idea de una función vectorial de variable vectorial con existencia *intrínseca*, es decir, independiente de la base o forma elegida para su representación. La función $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{u})$ representa una auténtica función vectorial, que no puede representarse meramente por una matriz, pues frente a un cambio de base, debe cambiar de componentes. En nuestro desarrollo hemos partido de la radiación de rectas que pasaba por un punto O. Queda, pues, definido un tensor de inercia en cada punto del espacio. Utilizaremos una doble barra sobre una letra mayúscula para denotar un tensor. El tensor de inercia del punto O se escribirá $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}_O$ y en la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ queda definido por la matriz

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}_0)_{x,y,z} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{zx} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

Frente a un cambio de base a la $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} I_{x'} & -P_{x'y'} & -P_{z'x'} \\ -P_{x'y'} & I_{y'} & -P_{y'z'} \\ -P_{z'x'} & -P_{y'z'} & I_{z'} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{zx} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} T'$$

y el momento de inercia respecto a δ se puede escribir $I_\delta = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{I}_O \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\ell}$

En algunas ocasiones es útil disponer de una representación geométrica de las características de inercia de un sólido en un punto O. Para ello se define el elipsoide de inercia de O de la siguiente forma:

Sobre cada una de las rectas que pasan por O, se lleva a ambos lados la distancia $\frac{k}{\sqrt{I_\delta}}$, donde k es una constante arbitraria positiva con dimensiones de $[m]^{\frac{1}{2}}[L]^2$. Se tiene entonces la superficie:

$$\boldsymbol{r} = \pm\frac{k}{\sqrt{I_\delta}}\boldsymbol{u} \Rightarrow I_\delta \operatorname{nor} \boldsymbol{r} = k^2 =$$

$$= (|\boldsymbol{r}|\boldsymbol{u}) \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{I}}})_O(|\boldsymbol{r}|\boldsymbol{u}) = k^2$$

$$= \boldsymbol{r} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{I}}})_O\boldsymbol{r} = k^2$$

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2P_{yz}yz - 2P_{zx}zx - 2P_{xy}xy = k^2$$

ecuación de un elipsoide referido a su centro. El tensor de inercia viene representado por una matriz simétrica que, dado que $I_\delta \geq 0$ debe tener tres valores propios reales no negativos y , al menos, tres direcciones invariantes asociadas mutuamente perpendiculares. Si se eligen estas direcciones como base para representar el tensor, la matriz será diagonal con los momentos de inercia (que serán los valores propios) respectivos en dicha diagonal. La representación del elipsoide de inercia tensor en esta referencia sería

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = k^2$$

en la que se aprecia que está referido a sus ejes.

Cuando el elipsoide de inercia es de revolución, entonces existe un eje de revolución y todos los perpendiculares a este eje que pasan por el centro son asímismo ejes del elipsoide, todos ellos tienen el mismo momento de inercia y determinan lo que se conoce como *plano ecuatorial*. En este caso el

tensor de inercia tiene un valor propio doble y otro simple, correspondiendo el autovector de este último a la dirección del eje de revolución, mientras que el subespacio propio asociado al autovalor doble es el plano ecuatorial. Si el elipsoide es esférico, entonces todas las rectas que pasan por el centro son ejes del mismo, comparten el mismo momento de inercia y el tensor de inercia se puede escribir, en cualquier base, como el producto del momento de inercia común por el tensor identidad $\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}$.

La ecuación recién obtenida evidencia que el mayor y el menor momento de inercia del sólido se da, respectivamente sobre el menor y mayor eje del elipsoide.

Las fórmulas de Steiner afectan a las componentes del tensor de inercia.Escribimos su expresión matricial :

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = (\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}^{*}) + M\,\mathrm{nor}(\boldsymbol{r}_c)(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}) - M(\boldsymbol{r}_c)^T(\boldsymbol{r}_c) \tag{4}$$

donde U es la matriz identidad 3×3 y $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}^{*}$ es el tensor de inercia del centro de masas. Esta fórmula resume todas las de Steiner.

6. Simetrías en la distribución

Cuando la distribución de masas de partida presenta algunas características especiales de simetría, entonces los momentos estáticos y los de inercia presentan algunas relaciones predecibles, que se explicitan a continuación:

- si π es un plano de simetría del sólido, entonces:
  - $C \in \pi$ es decir, el momentyo estático $\vec{\mathcal{M}}_\pi = \vec{0}$
  - el producto de inercia de π con cualquier otro plano π' perpendicular a π es nulo $P_{\pi\pi'} = 0$.
  - todas las rectas perpendiculares a π son ejes de los elipsoides de inercia de los puntos en que cortan a π.
- si δ es un eje de simetría del sólido, entonces:
  - $C \in \delta$ es decir, el momentyo estático $\vec{\mathcal{M}}_\delta = \vec{0}$
  - el producto de inercia de cualquier plano perpendicular a δ π con cualquier otro plano π' que contenga a δ es nulo $P_{\pi\pi'} = 0$.
  - δ es eje de los elipsoides de inercia de todos sus puntos.
- si δ es un eje de revolución del sólido, entonces:
  - $C \in \delta$ es decir, el momentyo estático $\vec{\mathcal{M}}_\delta = \vec{0}$
  - el producto de inercia de cualquier plano perpendicular a δ π con cualquier otro plano π' que contenga a δ es nulo $P_{\pi\pi'} = 0$.
  - δ es eje de los elipsoides de inercia de todos sus puntos.

– todos los elipsoides de inercia de los puntos de δ son de revolución en torno a δ.

– las rectas del plano ecuatorial de dichos elipsoides son ejes de los mismos y tienen todas el mismo momento de inercia.

7. Ejes de los elipsoides de inercia

Las características de inercia de un sólido rígido respecto a un punto del espacio están condensadas en su elipsoide de inercia.

La ecuación del elipsoide de inercia de un punto O, si $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$ es su tensor de inercia, es

$$\boldsymbol{r} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{r} = k^2$$

donde $\boldsymbol{r}$ es un vector de posición con origen en O y k es una constante arbitraria con dimensiones.

Dado un punto O del espacio, podemos clasificar el conjunto de rectas que pasan por O en dos grupos: las que son ejes del elipsoide de inercia de O, y las que no lo son. La condición para que una recta δ, paralela al vector unitario $\boldsymbol{u}$, sea eje del elipsoide de inercia anterior, es que corte perpendicularmente a dicho elipsoide.

La normal al elipsoide de inercia de O en un punto P posicionado por el vector $\boldsymbol{r}$ es paralela al vector

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{r} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{r}) = 2\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{r}$$

pero, dado que $\boldsymbol{r}$ es paralelo a $\boldsymbol{u}$, un vector normal al elipsoide de inercia es:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{u}$$

y la condición para que δ sea eje del elipsoide de inercia de O es que

$$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}_o \cdot \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$$

para algún λ real, lo cual expresa la ortogonalidad entre recta y elipsoide.

El primer miembro de la ecuación anterior representa una función vectorial definida para cada punto O del espacio y para cada recta que pase por ese punto. Llamemos a dicha función *vector de inercia* $\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u})$, ya documentada en [3]:

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) = \overline{\overline{\boldsymbol{I}}}_o \cdot \boldsymbol{u}$$

y la condición anterior para que δ sea eje del elipsoide de inercia de O es:

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

Escribimos la expresión matricial del teorema de Steiner:

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = (\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}^*) + M \operatorname{nor}(\boldsymbol{r}_c)(\overline{\overline{\boldsymbol{U}}}) - M(\boldsymbol{r}_c)^T(\boldsymbol{r}_c)$$

donde U es la matriz identidad 3×3 y $\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}^*$ es el tensor de inercia del centro de masas. La función $\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}$ puede escribirse, a la vista de la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) + M(\operatorname{nor} \boldsymbol{r}_c)\boldsymbol{u} - M\boldsymbol{r}_c(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})$$

lo que constituye la *fórmula de Steiner* para el vector de inercia.

La condición para que δ sea eje del elipsoide de inercia de O queda

$$\boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u} \tag{5}$$

8. Clasificación de las rectas

En la sección anterior se ha estudiado una propiedad definida entre una recta y el elipsoide de inercia de un punto. Procederemos a estudiar el número de puntos de cuyos elipsoides puede ser eje una recta dada. El resultado de este análisis permitirá realizar una clasificación del conjunto de rectas del espacio en función de unas características de inercia cualitativamente distintas.

Realizaremos un análisis por casos, según el centro de masas pertenezca a la recta δ o sea exterior a la misma.

8.1. La recta pasa por el centro de masas

En este caso, $\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u} = 0$. El vector de inercia es:

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) + M \operatorname{nor} \boldsymbol{r}_c \boldsymbol{u} - M(\underbrace{\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u}}_{=0})\boldsymbol{r}_c$$

y la condición (5) queda:

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} + M \operatorname{nor} \boldsymbol{r}_c \underbrace{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}}_{=\mathbf{0}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u}$$

es decir, la recta δ será eje del elipsoide de inercia de O si y sólo si la recta δ es eje del elipsoide central de inercia. En este caso, dado que O es un

punto cualquiera de la recta δ, ésta será eje de los elipsoides de inercia de todos sus puntos. Este resultado se puede enunciar solemnemente en el siguiente:

Teorema 1 *Entre todas las rectas que pasan por el centro de masas se distinguen dos únicas clases: las que son ejes del elipsoide de inercia de todos sus puntos y las que no lo son de ninguno de ellos.*

8.2. La recta no pasa por el centro de masas

En este caso, $\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u} \neq 0$, el vector de inercia en un punto O de la recta δ es

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) + M \operatorname{nor} \boldsymbol{r}_c \boldsymbol{u} - M \underbrace{(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})}_{=0} \boldsymbol{r}'_c \tag{6}$$

buscamos un punto O' de dicha recta cuyo elipsoide de inercia la tenga por eje. Es decir, un punto O' tal que:

$$\boldsymbol{\ell}(O', \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

Su vector de inercia es:

$$\boldsymbol{\ell}(O', \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) + M \operatorname{nor} \boldsymbol{r}'_c \boldsymbol{u} - M(\boldsymbol{r}'_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}'_c \tag{7}$$

como $O, P \in \delta$ entonces el vector $\boldsymbol{O'O}$ es paralelo a $\boldsymbol{u}$ y se puede escribir $\boldsymbol{O'O} = \lambda \boldsymbol{u}$ donde λ es un parámetro real que posiciona P sobre la recta, una vez elegido el punto O, que actúa como origen de δ. De esta forma:

$$\boldsymbol{r}'_c = \boldsymbol{O'C} = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{r}_c = \lambda \boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}_c$$

La ecuación (7)se escribe

$$\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}) + M\,\mathrm{nor}(\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\boldsymbol{u} - M((\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\cdot\boldsymbol{u})(\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)$$

multiplicando vectorialmente por $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}+M\,\mathrm{nor}(\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\underbrace{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}}_{=\boldsymbol{0}}-M((\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\cdot\boldsymbol{u})(\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\times\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}-M((\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\cdot\boldsymbol{u})\lambda\underbrace{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}}_{=\boldsymbol{0}}-M((\lambda\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}_c)\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} - \lambda M\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{u} - M(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{u} \tag{8}$$

multiplicando la ecuación (6) vectorialmente por $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} - M(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{u} \tag{9}$$

Haciendo $\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ y restando (8) de (9) queda:

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u} = \lambda M\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{u} \tag{10}$$

Si existe algún valor de λ que satisface la ecuación (10) entonces existe un punto O' posicionado por $\boldsymbol{OO'} = -\lambda\boldsymbol{u}$ cuyo elipsoide de inercia tiene a la recta δ como eje. Pero la ecuación anterior sólo puede satisfacerse si los vectores $\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}$ y $M\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{u}$ son paralelos pues, en caso contrario, ningún escalar λ, multiplicado por el segundo, puede dar el primero. La colinealidad de estos dos vectores exige el paralelismo de los planos $(\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})$

y $(\boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{u})$ lo que matemáticamente se expresa por la nulidad del producto mixto:

$$(\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{11}$$

que puede escribirse, aplicando la fórmula de Steiner para el vector de inercia:

$$(\boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) + M \operatorname{nor} \boldsymbol{r}_c \boldsymbol{u} - M(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}_c)\boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{u}) = 0$$

donde los dos últimos sumandos del primer factor son paralelos al tercer y segundo factores respectivamente, por lo que pueden simplificarse, obteniendo la condición

$$(\boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{12}$$

que representa la consición analítica necesaria y suficiente para que una recta que no pase por C sea eje del elipsoide de inercia de alguno de sus puntos. Llamaremos a la ecuación anterior *test de inercia* o *condición de inercialidad*.

Supuesto que (12) es satisfecha, entonces sólo hay un valor de λ que satisfaga la ecuación (10), por lo que sólo existe un punto O' de cuyo elipsoide de inercia sea eje la recta δ. Dicho punto está posicionado por:

$$\boldsymbol{OO'} = -\frac{(\boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\pi)}{M(\boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\pi)}\boldsymbol{u}$$

donde $\boldsymbol{u}_\pi$ es un vector perpendicular al plano $\boldsymbol{r}_c, \boldsymbol{r}_c$ y el denominador no puede anularse, pues si lo hiciese, δ contendría C, contra lo supuesto. Las conclusiones obtenidas pueden condensarse en el siguiente:

Teorema 2 *Entre todas las rectas que no pasan por el centro de masas se distinguen dos únicas clases: las que son ejes del elipsoide de inercia de uno y sólo uno de sus puntos y las que no lo son de ninguno de ellos.*

Las consideraciones anteriores permiten efectuar una partición del conjunto de rectas del espacio en las siguientes clases :

Rectas *principales* de inercia las rectas que pasan por el centro de masas C, y son ejes del elipsoide central de inercia.

Rectas *centrales* de inercia las rectas que pasan por el centro de masas y no son ejes del elipsoide central de inercia.

Rectas *secundarias* de inercia las rectas que no pasan por el centro de masas y son ejes del elipsoide de inercia de alguno de sus puntos.

Rectas *terciarias* de inercia las rectas no incluidas en las clases anteriores, es decir las que no pasan por el centro de masas y no son eje del elipsoide de inercia de ninguno de sus puntos.

De las rectas de cada una de estas clases, podemos enunciar las siguientes propiedades:

- Las rectas principales de inercia son ejes de los elipsoides de inercia de todos sus puntos.
- Las rectas centrales de inercia no son ejes de los elipsoides de inercia de ninguno de sus puntos.

- Las rectas secundarias de inercia son ejes del elipsoide de inercia de uno y sólo uno de sus puntos. Este punto se llamará *punto característico* de la recta. Además, todas cumplen la condición expresada en (12).

- Las rectas terciarias de inercia no son ejes del elipsoide de inercia de ninguno de sus puntos, y no cumplen (12). Algunos de estos resultados aunque más reducidos, son mencionados, aunque deducidos en un contexto dinámico en [2],[3], quedando demostrado en las líneas anteriores, que no es necesario partir de éste.

Podemos sintetizar las conclusiones anteriores en el siguiente cuadro que proporciona el procedimiento de clasificación de una recta cualquiera:

$$\delta \quad \left\{ \begin{array}{l} C \in \delta \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0} & \Longleftrightarrow \text{ Rectas principales} \\ \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0} & \Longleftrightarrow \text{ Rectas centrales} \end{array} \right. \\ C \notin \delta \left\{ \begin{array}{ll} (\boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}_c) = 0 & \Longleftrightarrow \text{ Rectas secundarias} \\ (\boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}_c) = 0 & \Longleftrightarrow \text{ Rectas terciarias} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

9. Clasificación de los planos

Del mismo modo que hemos clasificado las rectas del espacio, podemos utilizar el campo de elipsoides de inercia de una distribución arbitraria de masas para clasificar el conjunto de planos del espacio. Definamos una propiedad de un plano π en un punto O perteneciente a π. Esta propiedad es la de ser plano de simetría del elipsoide de inercia de O. Geométricamente esta propiedad equivale a la siguiente: la normal a π por O es eje del elipsoide de inercia de O. Para esta segunda condición ya hemos desarrollado una expresión analítica, que podemos volver a utilizar. Si $\boldsymbol{u}$ es un vector unitario perpendicular a π, y $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición de O desde C, entonces π es un plano de simetría del elipsoide de inercia de O si y sólo si :

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

es decir,

$$\boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = m(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u})$$

Procedamos al estudio separadamente de planos que pasen por C, y planos que no pasen por C.

9.1. π contiene a C

en este caso $\boldsymbol{r_c} \cdot \boldsymbol{u}_\pi = 0$. Aplicando la fórmula de Steiner para el vector de inercia, se tiene:

$$\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\ell}(C, \boldsymbol{u}) + M \operatorname{nor} \boldsymbol{r}_c \boldsymbol{u} - M(\underbrace{\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u}}_{=0})\boldsymbol{r}_c$$

y, por lo tanto,

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}+M\,\mathrm{nor}\,\boldsymbol{r}_c\underbrace{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}}_{=\boldsymbol{0}}$$

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}$$

y π será plano de simetría del elipsoide de inercia de O si y sólo si lo es del elipsoide central. En este caso, además, lo sería de los de todos sus puntos, pues O es un punto genérico. Esto conduce al

Teorema 3 *Entre todos los planos que pasan por el centro de masas se distinguen dos únicas clases: los que son planos de simetría del elipsoide de inercia de todos sus puntos y los que no lo son de ninguno de ellos.*

9.2. π no contiene a C

En este caso, $\boldsymbol{r_c}\cdot\boldsymbol{u}_\pi\neq 0$ .Tomaremos un origen $O\in\pi$ e investigaremos la existencia de algún o ,algunos otros puntos $O'\in\pi$ cuyos elipsoides de inercia tengan a π como plano de simetría.

El vector de inercia en O es, por la fórmula de Steiner,

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})+M\,\mathrm{nor}\,\boldsymbol{r}_c\boldsymbol{u}-M(\boldsymbol{r}_c\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c$$

El vector de inercia en O' será

$$\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u})=\boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u})+M\,\mathrm{nor}\,\boldsymbol{r}'_c\boldsymbol{u}-M(\boldsymbol{r}'_c\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}'_c$$

donde $\boldsymbol{r}'_c = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{r}_c$

Multiplicando las dos expresiones anteriores vectorialmente por $\boldsymbol{u}$ queda

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} - M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{\ell}(C,\boldsymbol{u}) - M(\boldsymbol{r}'_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}'_c \times \boldsymbol{u} \end{array} \right.$$

igualando $\boldsymbol{\ell}(O',\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = 0$ y restando, queda

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = M[(\boldsymbol{r}'_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}'_c \times \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u}]$$

Sustituyendo

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = M[((\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{r}_c) \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{r}_c) \times \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u}]$$

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = M[(\underbrace{\boldsymbol{O'O} \cdot \boldsymbol{u}}_{=0}) + (\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u}]$$

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = M[(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{u} + \underbrace{(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{u}}_{=\boldsymbol{0}}]$$

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{u}$$

El primer miembro es un vector paralelo al plano π, por lo que, dado que $M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u}) \neq 0$, siempre existirá un vector $\boldsymbol{O'O}$ del plano π que satisfaga la ecuación anterior. Este vector puede despejarse premultiplicando ambas expresiones por $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u}) = M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u}) = M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{O'O}$$

y, por tanto, siempre existirá una y sólo una solución para $O' \in \pi$, dada por la expresión:

$$\boldsymbol{O'O} = \frac{\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{\ell}(O, \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u})}{M(\boldsymbol{r}_c \cdot \boldsymbol{u})}$$

De acuerdo con estas consideraciones, podemos efectuar una partición del conjunto de los planos según sus características de inercia en las siguientes clases:

planos *principales* de inercia los planos de simetría del elipsoide central de inercia.

planos *centrales* de inercia los planos que pasan por el ceentro de masas y no son planos de simetría del elipsoide central de inercia.

planos *secundarios* de inercia los planos que no pasan por el centro de masas.

Podemos enunciar las propiedades de inercia de los planos de cada una de estas clases a la luz de los resultados anteriores.

- los planos principales de inercia son planos de simetriaa de los elipsoides de inercia de todos sus puntos.
- los planos centrales de inercia no son planos de simetría del elipsoide de inercia de ninguno de sus puntos.
- los planos secundarios de inercia son planos de simetría del elipsoide de inercia de uno y sólo uno de sus puntos.

10. Clasificación de las direcciones

Una vez clasificados el conjunto de rectas y el de planos del espacio, hacemos una abstracción y queremos analizar qué tipos de direcciones del espacio nos define las características de inercia de una distribución dada de masas.

El punto de partida lo tenemos resuelto, pues la clasificación de rectas y planos nos proporciona una clasificación natural de las direcciones del espacio. Según esto, definamos la partición del conjunto de direcciones del espacio en las siguientes clases:

ortodirecciones planarias de inercia son las direcciones perpendiculares a los planos principales de inercia, es decir, las paralelas a alguna recta principal de inercia.

ortodirecciones axiales de inercia son las direcciones perpendiculares a las rectas principales de inercia, o lo que es lo mismo, paralelas a algún plano principal de inercia, no incluidas en la clase anterior.

clinodirecciones de inercia las direcciones no incluidas en las clases anteriores.

Una vez clasificadas las direcciones, nos hacemos las siguientes preguntas: dada un dirección del espacio ...

- ¿ en qué puntos del espacio existirá un elipsoide de inercia con un eje paralelo a esa dirección ?

- ¿ dónde estarán, si las hay, las rectas principales, secundarias, centrales, terciarias de inercia, paralelas a la misma ?

Contestaremos separadamente a estas preguntas, según el tipo de dirección de que se trate.

En los tres casos (ortodirecciones planarias, ortodirecciones axiales, clinodirecciones de inercia), tomaremos un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas C, y con eje x, paralelo a la dirección en estudio. Los ejes y, z se definirán de forma distinta en cada situación.

10.1. Ortodirecciones planarias de inercia

En este caso podemos tomar los ejes y, z según dos rectas principales de inercia. La expresión matricial del tensor central de inercia en esta base tiene forma diagonal:

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \begin{pmatrix} I_x^* & 0 & 0 \\ 0 & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix}$$

El tensor de inercia del punto O, posicionado por sus coordenadas (ξ, η, ζ), aplicando la expresión matricial de las fórmulas de Steiner queda:

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \begin{pmatrix} I_x^* & 0 & 0 \\ 0 & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} + M(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi\eta & \zeta\xi \\ \xi\eta & \eta^2 & \eta\zeta \\ -\zeta\xi & \eta\zeta & \zeta^2 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \begin{pmatrix} I_x^* & 0 & 0 \\ 0 & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\zeta\xi \\ -\xi\eta & \zeta^2+\xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix}$$

buscamos los puntos O en los que

$$\boldsymbol{\ell}(O,\boldsymbol{i}) \times \boldsymbol{i} = \mathbf{0}$$

es decir

$$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_x^* & 0 & 0 \\ 0 & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\zeta\xi \\ -\xi\eta & \zeta^2+\xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_x^* + M(\eta^2+\zeta^2) \\ -M\xi\eta \\ -M\zeta\xi \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi\eta & = & 0 \\ \xi\zeta & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \xi & = & 0 \text{ plano } \perp \quad x \\ y,z & = & 0 \text{ eje } x \end{array} \right.$$

y es evidente que:

Teorema 4 *el lugar geométrico de puntos cuyo elipsoide de inercia tiene un eje con ortodirección planaria está compuesto por los de la recta principal paralela y los del plano principal perpendicular.*

lo que conduce al

Corolario 1 *el conjunto de rectas secundarias de inercia paralelas a esa dirección es tá compuesto por todas ellas excepto la principal.*

10.2. Ortodirecciones axiales de inercia

En este caso, suponemos que el eje x es perpendicular a una recta principal de inercia y siempre se podrá tomar el eje z según una recta principal, aunque nunca podremos tomar el eje y según otra. La expresión matricial del tensor de inercia del punto $O(\xi,\eta,\zeta)$ queda:

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \begin{pmatrix} I_x^* & -P_{xy}^* & 0 \\ -P_{xy}^* & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\zeta\xi \\ -\xi\eta & \zeta^2+\xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}})(\boldsymbol{i}) = [\begin{pmatrix} I_x^* & -P_{xy}^* & 0 \\ -P_{xy}^* & I_y^* & 0 \\ 0 & 0 & I_z^* \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\zeta\xi \\ -\xi\eta & \zeta^2+\xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}})(\boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} I_x + M(\eta^2+\zeta^2) \\ -P_{xy} - M\xi\eta \\ -M\zeta\xi \end{pmatrix}$$

Por lo que será necesario que

$$\begin{cases} \xi\eta &= -\dfrac{P_{xy}}{M} \\ \zeta &= 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se puede enunciar el siguiente:

Teorema 5 *el conjunto de puntos cuyo elipsoide de inercia tiene un eje según una ortodirección axial dada es una hipérbola contenida en el plano principal paralelo a la ortodirección estudiada. Esta hipérbola se conoce como* hipérbola de inercia *de la dirección.*

del que se deduce el

Corolario 2 *El conjunto de rectas secundarias paralelas a una ortodirección axial dada es el conjunto de rectas contenidas en el plano de la hipérbola, excepto la central.*

10.3. Clinodirecciones de inercia

Para éstas, nunca podremos elegir ejes y, z según rectas principales, y los tomaremos según dos ejes cualesquiera perpendiculares entre sí y al eje x. La expresión matricial del tensor de inercia de $O(\xi, \eta, \zeta)$ queda:

$$(\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}) = \begin{pmatrix} I_x^* & -P_{xy}^* & -P_{zx}^* \\ -P_{xy}^* & I_y^* y & -P_{yz}^* \\ -P_{zx}^* & -P_{yz}^* & I_z^* \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \eta^2 + \zeta^2 & -\xi\eta & -\zeta\xi \\ -\xi\eta & \zeta^2 + \xi^2 & -\eta\zeta \\ -\zeta\xi & -\eta\zeta & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}$$

con lo que debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \xi\eta &= -\frac{P_{xy}^*}{M} \\ \zeta\xi &= -\frac{P_{zx}}{M} \end{cases}$$

ecuación de una hipérbola equilátera una de cuyas asíntotas es la recta central de inercia paralela a la clinodirección de partida. Puede demostrarse que el plano de la hipérbola es el determinado por la dirección y la normal al elipsoide central de inercia en el punto en que éste es cortado por la recta central paralela a la dirección original.

Por lo tanto, se enuncia un teorema similar al de los casos anteriores:

Teorema 6 *el conjunto de puntos cuyo elipsoide de inercia tiene un eje según una clinodirección dada es una hipérbola contenida en el plano central paralelo a la dirección y a la normal al elipsoide central. Esta hipérbola se conoce como* hipérbola de inercia *de la dirección.*

y, como consecuencia, se llega al:

Corolario 3 *El conjunto de rectas secundarias paralelas a una clinodirección dada es el conjunto de rectas contenidas en el plano de la hipérbola, excepto la central.*

En la Tabla I se recogen los resultados anteriores.

Clase de dirección	Puntos característicos
Ortoplanaria	recta ppal $\parallel$ y plano ppal $\perp$
Ortoaxial	hipérbola equilátera en plano ppal $\parallel$
Clinodirección	hipérbola equilátera