Autoinducción de una Espira Circular

- Calcule el coeficiente de autoinducción de una espira circular de radio R y sección también circular de radio $a \ll R$

Respuesta:

Según se ha desarrollado en la teoría el coeficiente de autoinducción para una espira de pequeña sección circular de radio a y longitud total s es

$$L = M + \frac{\mu_0 s}{8\pi}$$

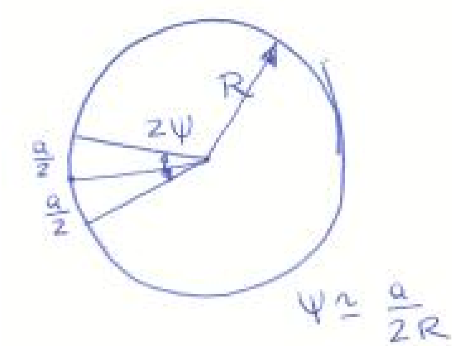
donde

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{r>a/2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'}{r}$$

Para calcular M se plantea

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_{\varphi'+\psi}^{\varphi'+2\pi-\psi} \frac{\cos(\varphi-\varphi')\mathrm{d}\varphi}{2R\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)\right|} \right) \mathrm{d}\varphi'$$

donde $\psi \approx \frac{a}{2R}$.



La integral situada entre paréntesis puede calcularse fácilmente con el cambio $\alpha = \varphi - \varphi'$ y su evaluación en el intervalo $\psi < \alpha < \pi$

$$J = \int_{\varphi'+\psi}^{\varphi'+2\pi-\psi} \frac{\cos(\varphi-\varphi')\mathrm{d}\varphi}{2R\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)\right|}$$

con el cambio y la reducción del intervalo de integración queda

$$J = \int_{\psi}^{\pi} \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}\alpha$$

que puede escribirse separando la integral en una suma de otras dos que ya han aparecido frecuentemente en la carrera

$$J = \int_{\psi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} - 2\int_{\psi}^{\pi} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha$$

y evaluar las primitivas de las dos integrales indicadas

$$J = 2\ln\tan(\alpha/4)_{\psi}^{\pi} + 4\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)_{\psi}^{\pi}$$

de forma que sustituyendo se obtiene

$$J = -2\ln\frac{a}{8R} - 4 = 2\ln\frac{8R}{a} - 4$$

$$M = \frac{\mu_0}{2}RJ = \mu_0 R(\ln\frac{8R}{a} - 2)$$

$$L = M + \mu_0 R/4$$

$$L = \mu_0 R(\ln\frac{8R}{a} - \frac{7}{4})$$