Emisión y recepción de ondas de radio

Contents

1 Introducción

Este documento corresponde a unas notas que resumen algunos temas de campos electromagnéticos y dada su provisionalidad pueden contener erratas. No son en modo alguno un texto de ninguna asignatura.

2 Potenciales electromagnéticos

Los fenómenos eléctricos y magnéticos originan el campo electromagnético. Las ecuaciones de Maxwell que rigen su comportamiento en medios lineales e isótropos son

$$\left.\begin{array}{rcl}\nabla\cdot\boldsymbol{E} & = & \frac{\rho}{\epsilon}\\ \nabla\times\boldsymbol{E} & = & -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} & = & 0\\ \nabla\times\boldsymbol{B} & = & \mu\boldsymbol{j}+\mu\epsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{array}\right\}\tag{1}$$

La tercera ecuación indica que puede definirse un potencial vector $\boldsymbol{A}$ del que derive $\boldsymbol{B}$, de forma que

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{2}$$

con lo que la segunda ecuación de Maxwell puede escribirse

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{0}$$

lo que implica la existencia de un potencial escalar ϕ tal que

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\tag{3}$$

Nótese que si se considera una función $f(x,y,z,t)$, entonces los potenciales $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla f,\quad \phi'=\phi-\dfrac{\partial f}{\partial t}$ también satisfacen las condiciones anteriores. Enseguida se retomará esta indeterminación.

Si se utiliza ahora la cuarta ecuación de Maxwell, se tiene

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mu\boldsymbol{j}-\mu\epsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}$$

es decir

$$\Box\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{j}+\mu\epsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\tag{4}$$

y para ϕ

$$\Delta\phi=-\frac{\rho}{\epsilon}+\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\tag{5}$$

3 Condiciones de contraste

Dado que los potenciales quedan indeterminados, se pueden imponer condiciones adicionales, denominadas condiciones de contraste o, en la literatura inglesa, condiciones *gauge*.

- La condición de contraste de Coulomb

  $$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{6}$$

  hace que el potencial escalar satisfaga la ecuación de Poisson

  $$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

  mientras que el potencial vector satisface

  $$\Box \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j} + \mu\epsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

- Es posible hacer $\phi' = 0, \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \int_{t0}^{t} \nabla\phi \mathrm{d}t$ en los campos anteriores, obteniendo la condición de contraste de la radiación, utilizada en Mecánica Cuántica. En este caso

  $$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}$$

  $$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}'$$

- Si se hace

  $$\mu\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{7}$$

  se tiene la condición de Lorentz que hace que los potenciales verifiquen

  $$\Box \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{j} \tag{8}$$

  $$\Box \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{9}$$

4 Solución de la ecuación de ondas

La solución para la ecuación de ondas completa, en el *gauge* de Lorentz y supuestas verificadas condiciones de radiación en el infinito, es

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{j}(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} \mathrm{d}\tau \tag{11}$$

donde

$$r = \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2\right]^{1/2}$$

y la integración se realiza sobre las variablas (ξ, η, ζ).

Es interesante verificar el carácter de esta solución en el caso de una carga puntual situada en el origen de coordenadas $Q(t)$ variable en el tiempo[1]. Entonces

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon r} Q(t - \frac{r}{c})$$

es decir, un potencial que disminuye de forma inversamente proporcional a la distancia a la fuente y que se encuentra *retardado* respecto a la fuente en un tiempo igual al necesario para viajar desde la fuente hasta el punto en el que se calcula el potencial.

Las ecuaciones 10,11, junto con 2,3 determinan el campo electromagnético en medios homogéneos en función de las fuentes y pueden considerarse una alternativa a las ecuaciones de Maxwell en numerosas ocasiones.

Si se desean calcular los campos, se tiene

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \left\{ \frac{\partial\,[\rho]}{\partial t} \frac{\boldsymbol{u}_r}{cr} + \frac{[\rho]}{r^2}\boldsymbol{u}_r + \frac{\partial\,[\boldsymbol{j}]}{\partial t} \frac{1}{c^2 r} \right\} \mathrm{d}\tau \tag{12}$$

denotando el corchete que la dependencia temporal está retardada. Para la inducción magnética

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{\partial\,[\boldsymbol{j}]}{\partial t} \times \frac{\boldsymbol{u}_r}{cr} + \frac{[\boldsymbol{j}]}{r^2} \times \boldsymbol{u}_r \right\} \mathrm{d}\tau \tag{13}$$

Las ecuaciones 12,13 relacionan directamente los campos con las fuentes y también pueden constituir una alternativa a las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos.

A continuación se deduce la ecuación de ondas satisfecha por los campos $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ sin cargas. De la segunda ecuación de Maxwell

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

que teniendo en cuenta la primera ecuación de Maxwell resulta

$$\Box \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

Igualmente, el campo $\boldsymbol{B}$ satisface la ecuación de ondas

$$\Box \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

En una zona libre de cargas, según lo anterior, las componentes catesianas de los campos $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ y, en el gauge de Lorentz, de $\boldsymbol{A}$ y la propia función ϕ, satisfacen la ecuación de ondas

$$\Box U = 0 \tag{14}$$

La solución de 14 cuando c es constante, como es bien sabido, es siempre una superposición de funciones viajeras cuya velocidad de propagación es c.

[1] tómese sólo como ilustración del carácter del retardo en la expresión anterior. Esta situación no es físicamente posible, ya que viola la ecuación de continuidad.

5 Campos de variación lenta

Las expresiones 10,11 pueden aproximarse de diferente forma, según el problema que se trate. Para ello, supondremos que la variación temporal de las corrientes y cargas presenta una pulsación ω y que el recinto en el que calculamos el campo y están situadas las fuentes tiene un diámetro D En este caso, el retardo

$$\frac{r}{c}$$

vale siempre menos que

$$\frac{D}{c}$$

y su contribución en términos del tipo

$$\cos\left(\omega t - \frac{\omega r}{c}\right)$$

es despreciable cuando

$$\frac{\omega D}{c} \ll 1$$

como suele ser habitual a frecuencias industriales ($\omega = 100\pi$ rad s^{-1}), con dimensiones D del orden del metro

$$\frac{\omega D}{c} = \frac{100\pi}{300000000} = 1,04710^{-6} \ll 1$$

En este caso se dice que los campos son *de variación lenta* y el retardo en los potenciales se ignora, con lo cual quedan las expresiones

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$\boldsymbol{A} == \frac{\mu}{4\pi}\iiint \frac{\boldsymbol{j}(\xi,\eta,\zeta,t)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

que obedecen a las ecuaciones diferenciales de Poisson

$$\Delta\phi = -\rho$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{j}$$

lo cual equivale a trabajar en el gauge $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ con las ecuaciones de Maxwell simplificadas

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla\cdot\boldsymbol{E} & = & \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla\times\boldsymbol{E} & = & -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} & = & 0 \\ \nabla\times\boldsymbol{B} & = & \mu\boldsymbol{j} \end{array}\right.$$

En este caso, la determinación de los potenciales se realiza atendiendo bien a las corrientes ,bien a las cargas desacopladamente.

El problema de la determinación de ϕ es el problema fundamental de la *Electrostática*; el de la determinación de $\boldsymbol{A}$ es el problema fundamental de la *Magnetostática*

6 Componentes monocromáticas

Frecuentemente el estudio de la propagación de una onda se realiza desglosando ésta en sus componentes monocromáticas.

$$U(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,y,z,\omega) \exp i\omega t \mathrm{d}\omega$$

y sustituyendo esta expresión en 14, haciendo $k^2 = \omega^2/c^2$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta u + k^2 u) \exp i\omega t \mathrm{d}\omega = 0$$

que implica, si se consideran soluciones $\forall t$, que cada componente monocromática verifique la *ecuación de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{15}$$

7 Descomposición en ondas planas

Cualquier función $u(x,y,z)$ define una transformada tridimensional de Fourier

$$V(m,v,w) = \int_{E_3} \exp\,(-imx - ivy - iwz)\,\psi(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

de forma que puede escribirse mediante

$$u(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega_3} \exp\,(imx + ivy + iwz)\,V(m,v,w)\mathrm{d}m\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

si u satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

entonces, dada la biyectividad (matizada) de la transformación de Fourier, se debe verificar que

$$\nabla^2 u + k^2 u = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{\Omega_3} (m^2 + v^2 + w^2 - k^2) \exp\,(imx + ivy + iwz)\,V(m,v,w)\mathrm{d}m\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 0$$

lo que implica que

$$V(m,v,w) = 0 \quad \text{cuando} \quad (m^2 + v^2 + w^2 - k^2) \neq 0$$

y por lo tanto la transformada de Fourier tridimensional sólo toma valores en la superficie esférica

$$m^2 + v^2 + w^2 = k^2$$

lo que implica que la función $u(x,y,z)$ se puede descomponer en todo el espacio de forma unívoca en un conjunto de ondas planas cuyo vector de propagación tiene por módulo k.

Existen métodos ópticos (difracción Fraunhofer, plano focal de una lente convergente ancha, etc) para descomponer cada una de las componentes de la función u en funciones de onda de las anteriores. Dado que se trata de una distribución bidimensional, sólo se necesita conocer la distribución de u en una superficie más el sentido de propagación para establecer la descomposición. Suele tomarse un plano $z = z_0$ como superficie de referencia y obtener la transformada de Fourier de la función $\psi(x, y, z_0)$, lo que añadido al sentido de propagación ($w = k_z > 0$ o $w = k_z < 0$) determina la función en todo el espacio.

8 Notación compleja

En lo que sigue, se supondrá que las fuentes del campo son monocromáticas. Esta situación no rebaja la generalidad del tratamiento, pues cualquier dependencia temporal de las fuentes puede expresarse mediante una superposición de funciones armónicas.

Cuando se tienen funciones cuya dependencia temporal es del tipo

$$f(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

compartiendo todas ellas el mismo ω, podemos expresarlas de la forma

$$f(t) = \mathrm{Re}\,\{a \exp\,(j\varphi)\, \exp\,(j\omega t)\}$$

siendo evidente que lo que diferencia unas funciones de otras es la *amplitud compleja*

$$A = a \exp\,(j\varphi)$$

siendo ésta amplitud suficiente para representar la función.

Una onda plana U puede escribirse como

$$U(x, y, z, t) = Re(A\exp\,(i\omega t - imx - ivy - iwz))$$

Si se tiene un campo electromagnético, una onda plana verifica

$$\boldsymbol{E} = Re(\boldsymbol{e}\exp\,(i\omega t - imx - ivy - iwz)) \quad \boldsymbol{H} = Re(\boldsymbol{h}\exp\,(i\omega t - imx - ivy - iwz))$$

entonces las ecuaciones de Maxwell 1 en el vacío y sin fuentes se escriben

$$\left.\begin{array}{c} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{k} = \mu\omega\boldsymbol{h} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\epsilon\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \Rightarrow \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{k} = -\epsilon\omega\boldsymbol{e} \end{array}\right\} \tag{16}$$

que indica el carácter transversal de las ondas electromagnéticas.

9 Emisión por un dipolo magnético

Sea un circuito C recorrido por una corriente $i(t) = \mathrm{Re}\{I \exp(j\omega t)\}$ en uno de cuyos puntos se sitúa el origen de coordenadas O de una referencia cartesiana $Oxyz$ con el tercer eje según la dirección y sentido del momento magnético $\boldsymbol{m}$ de la espira. Se denominará A a un punto genérico de C y $\boldsymbol{r}_A = \xi\boldsymbol{i} + \eta\boldsymbol{j} + \zeta\boldsymbol{k}$ a su vector de posición. Se procede a calcular el campo electromagnético en un punto P, de coordenadas x, y, z y distancia al origen r. Supondremos, además, que se verifica la hipótesis $\forall A \quad r_A \ll \lambda \ll r$. Llamaremos $\boldsymbol{r}_P = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ al vector de posición de P y $\boldsymbol{r} = (x-\xi)\boldsymbol{i} + (y-\eta)\boldsymbol{j} + (z-\zeta)\boldsymbol{k}$ al vector $\boldsymbol{AP}$. La hipótesis anterior permite aproximar

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$r \approx r_P - \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r_P} = r_P - \frac{\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P}{r_P}$$

Dado que la densidad de carga es nula, la aplicación de la ecuación 10 conduce a la nulidad del potencial escalar. El potencial vector se calcula a partir de la ecuación 11

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\exp(-jkr)}{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$$

Al integrar sobre el circuito C, el factor $1/r$ prácticamente no variará significativamente, pues nos encontramos integrando en una zona pequeña y lejana de P.

$$\boldsymbol{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r_P} \oint_C \exp(-jkr)\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$$

y utilizando la aproximación para r, se tiene

$$\boldsymbol{A} \approx \frac{\mu_0 I \exp(-jkr_P)}{4\pi r_P} \oint_C \exp\left(jk\frac{\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P}{r_P}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$$

$$\boldsymbol{A} \approx \frac{\mu_0 I \exp(-jkr_P)}{4\pi r_P} \oint_C \left(1 + jk\frac{\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P}{r_P}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$$

$$\boldsymbol{A} \approx \frac{j\mu_0 k I \exp(-jkr_P)}{4\pi r_P^2} \oint_C (\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$$

Pero

$$\begin{cases} -\boldsymbol{r}_P \times (\boldsymbol{r}_A \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}}) = (\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}} - (\boldsymbol{r}_P \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{r}_A \\ \mathrm{d}\{(\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P)\boldsymbol{r}_A\} = (\boldsymbol{r}_P \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{r}_A + (\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}} \end{cases}$$

de donde

$$(\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}} = -\frac{\boldsymbol{r}_P \times (\boldsymbol{r}_A \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}}) + \mathrm{d}\{(\boldsymbol{r}_A \cdot \boldsymbol{r}_P)\boldsymbol{r}_A\}}{2}$$

y al sustituir y anular la integral en un circuito del diferencial, se tiene

$$\boldsymbol{A} \approx -\frac{j\mu_0 k \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi r_P^2}\boldsymbol{r}_P \times \left(\frac{1}{2}\oint_C I\boldsymbol{r}_A \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{A}}\right)$$

$$\boldsymbol{A} = -\frac{j\mu_0 k \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi r_P^2}\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{m}$$

De donde

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k\omega \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi r_P^2}\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{m}$$

y teniendo en cuenta que $\omega = kc$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi c r_P^2}\boldsymbol{r}_P \times \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0 \omega^2 m \operatorname{sen}\theta \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi c r_P}\boldsymbol{u}_\varphi$$

Para el campo de inducción magnética se escribe

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \frac{j\mu_0 m \operatorname{sen}\theta \omega \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi c r_P}\boldsymbol{u}_\varphi$$

Se plantea el rotacional en esféricas

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r_P^2 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_r & r_P\boldsymbol{u}_\theta & r_P \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r_P} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r_P A_\theta & r_P \operatorname{sen}\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

teniendo en cuenta que las variaciones significativas son las de la exponencial, con lo que

$$\boldsymbol{B} = \frac{j\mu_0 m\omega \operatorname{sen}\theta}{4\pi c r_P^3 \operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_r & r_P\boldsymbol{u}_\theta & r_P \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r_P} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r_P \operatorname{sen}\theta \exp\left(-jkr_P\right) \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 m \operatorname{sen}\theta \omega^2}{4\pi c^2 r_P}\boldsymbol{u}_\theta$$

$$\boldsymbol{H} = -\frac{m \operatorname{sen}\theta \omega^2}{4\pi c^2 r_P}\boldsymbol{u}_\theta$$

y el valor medio del vector de Poynting queda

$$< \boldsymbol{P} >= \frac{\mu_0 m^2 \omega^4 \operatorname{sen}^2\theta}{32\pi^2 r_P^2}\boldsymbol{u}_r$$

que integrado origina

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} < \boldsymbol{P} > r_P^2 \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 m^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

y una resistencia

$$R_r = \frac{2W}{|I|^2} = \frac{\mu_0 S^2 \omega^4}{6\pi c^3}$$

donde $S = m/I$.

Una vez radiada, la onda llega a otro circuito C' (receptor) produciendo una fuerza electromotriz. Sea $\boldsymbol{S}' = S'\boldsymbol{k}'$ el momento magnético por unidad de intensidad $\frac{\boldsymbol{m}'}{I'}$ de C'. Por la ley de Faraday-Henry, se tiene

$$\mathcal{E}' = -\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}t}$$

Si las dimensiones de C' son pequeñas comparadas con la longitud de onda, entonces la inducción magnética en C' es prácticamente uniforme y se puede aproximar

$$\Phi' = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}'$$

por lo que

$$\mathcal{E}' = -j\omega S' \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{k}'$$

$$\mathcal{E}' = \frac{jISS'\omega^3}{4\pi c^2 r_P} (\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\theta \cdot \boldsymbol{k}')$$

pero

$$\boldsymbol{k} = \cos\theta \boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}\theta \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}_r \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_r) = -\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\theta$$

que permite escribir

$$\mathcal{E}' = -\frac{jI\omega^3}{4\pi c^2 r_P} \left\{ u_r \times (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{u}_r) \right\} \cdot \boldsymbol{S}'$$

y

$$\frac{\mathcal{E}'}{I} = -\frac{jI\omega^3}{4\pi c^2 r_P} \left\{ \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}' - (\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{S})(\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{S}') \right\} \tag{17}$$

Téngase en cuenta que los vectores $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}'$ son $\frac{\boldsymbol{m}}{I}, \frac{\boldsymbol{m}'}{I'}$ respectivamente. En el caso de circuitos planos (en $xy, x'y'$ de N, N' vueltas, equivaldrían a $NA\boldsymbol{k}, N'A'\boldsymbol{k}'$, donde A, A' serían las áreas encerradas por cada vuelta). La expresión (17) es simétrica por lo que permite enunciar el *teorema de reciprocidad para las antenas emisoras/receptoras:*

la fuerza electromotriz producida por una intensidad I circulando por C en un circuito C' es igual a generada en C por una intensidad I que circulase por C'

9.1 Problema

Una antena circular de área $S = 1\text{m}^2$ y $N = 1000$ vueltas es recorrida por una corriente de 9A con una frecuencia de $10/(2\pi)$ MHz ($\lambda = 188.5$ m).

Campo eléctrico máximo y eficaz, magnético máximo y eficaz, flujo medio de energía por unidad de superficie, potencia media emitida en su plano ecuatorial a una distancia de 10km.

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi c r} N I S \operatorname{sen}\theta\omega^2$$

El el S.I.

$$10^{-7}\frac{10^{-8}}{3}10^{-4}10^{3}910^{14} = 3\ 10^{-2}$$

V/m.

$$B = E/c = 10^{-10}$$

$$H = B/\mu_0 = 10^{-10}\frac{10^7}{4\pi} =\approx 8\ 10^{-5}A/m$$

$$< P >= \frac{1}{2}EH \approx 4\ 10^{-7}Wm^{-2}$$

$$W = \frac{1}{3}10^{-7}\frac{10^{-24}}{27}10^{28}8110^{6} = 10^{3}$$

$$R = 24.7\Omega$$

Determine la fem producida por la radiación en otra bobina idéntica paralela a la primera, situada en su plano ecuatorial a una distancia de 10km.

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 \omega k^2 N N' S S'}{4\pi r}\left[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_r)(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{u}_r)\right] I$$

En el S.I.

$$\mathcal{E} = 10^{-7}\frac{10^{-16}}{9}10^{21}10^{6}910^{-4} = 1$$

por lo tanto se tiene una señal de 1V

10 Emisión por un dipolo eléctrico

A continuación se procede a calcular la radiación generada por un dipolo eléctrico oscilante, de pulsación ω y longitud d cuyo momento dipolar viene expresado en notación compleja por

$$\boldsymbol{p} = Qd\boldsymbol{k}$$

con una carga en cada extremo $z = \pm\frac{d}{2}$ de valor máximo Q y una intensidad en el segmento $-\frac{d}{2} \le z \le \frac{d}{2}$

$$I = j\omega Q$$

Según (11) y suponiendo que $d \ll r, d \ll \lambda$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I d \exp\,(j - kr)}{4\pi r}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{j\mu_0 \omega \boldsymbol{p} \exp\,(j - kr)}{4\pi r}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{j\mu_0 \omega p \exp\,(j - kr)}{4\pi r}(\cos\theta \boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\theta)$$

Para Φ, utilizando (10) se tiene

$$\Phi = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}_r \exp\,(j - kr)}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{2}{r} + jk\right)$$

La inducción magnética $\boldsymbol{B}$ es

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{j\omega\mu_0 p \operatorname{sen}\theta \exp\,(j - kr)}{4\pi r^2} - \frac{\omega\mu_0 pk \operatorname{sen}\theta \exp\,(j - kr)}{4\pi r}$$

y

$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{j\omega p \operatorname{sen}\theta \exp\,(j - kr)}{4\pi r^2} - \frac{\omega pk \operatorname{sen}\theta \exp\,(j - kr)}{4\pi r}$$

cuya componente más significativa lejos de la fuente es

$$\boldsymbol{H}_r = -\frac{pck^2 \operatorname{sen}\theta \exp\,(j - kr)}{4\pi r}\boldsymbol{u}_\varphi$$

El campo eléctrico es

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\Phi$$

y su componente de radiación es

$$\boldsymbol{E}_r = \frac{\mu_0\omega^2 p \exp\,(j - kr)}{4\pi r}(\cos\theta\boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{u}_\theta) - \frac{pk^2\cos\theta\exp\,(j - kr)}{4\pi\epsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_r = -\frac{\mu_0\omega^2 p \exp\,(j - kr)}{4\pi r}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{u}_\theta$$

El vector de Poynting queda

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2 r^2}p^2\omega^2 k^2 \overset{2}{\operatorname{sen}}\theta\boldsymbol{u}_r$$

o bien

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2}p^2\omega^4 \overset{2}{\operatorname{sen}}\theta\boldsymbol{u}_r$$

que determina un valor medio

$$< \boldsymbol{P} >= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c r^2}p^2\omega^4 \overset{2}{\operatorname{sen}}\theta\boldsymbol{u}_r$$

que integrado para una esfera queda para unidades del S.I.

$$W = 9\,10^{17}p^2k^4$$