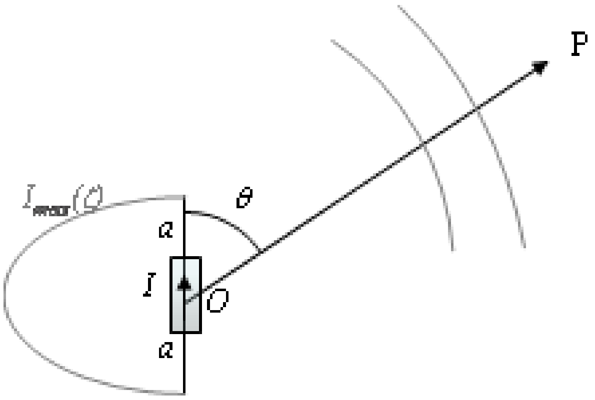
Antena lineal de media onda



Se desea emitir una onda de frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mediante una antena lineal, de longitud $2a$ dispuesta a lo largo del eje z en el segmento $(-a \leq \zeta \leq a)$, siendo ζ la abscisa de un punto genérico de dicha antena. La distribución de corriente obedece a la expresión:

$$I(t, \zeta) = I_0 \cos \omega t \cos \nu\zeta$$

donde $\nu = \frac{\pi}{2a}$. Sabiendo que el campo eléctrico radiado por un elemento de corriente lineal obedece a la expresión

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{E}} = j \frac{\mu_0 \omega \tilde{I}(\zeta) \exp(-jkr)}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{u}_\theta \mathrm{d}\zeta$$

con la interpretación habitual de los símbolos anteriores.

1.- Encuentre la amplitud compleja que define la intensidad $\tilde{I}(\zeta)$

$$I(\zeta, t) = I_0 \frac{\cos(\omega t + \nu\zeta) + \cos(\omega t - \nu\zeta)}{2}$$

por lo que

$$\tilde{I}(\zeta) = I_0 \frac{\exp(j\nu\zeta) + \exp(-j\nu\zeta)}{2}$$

2.- Aproxime la distancia r por $r_P - \zeta \cos\theta$, siendo r_P la distancia del punto P al origen, e integre la intensidad del campo eléctrico.

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = j \frac{\mu_0 \omega I_0 \exp(-jkr_P)}{4\pi r_P} \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{u}_\theta \int_{-a}^{a} \frac{\exp[j(k' + \nu)\zeta] + \exp[(k' - \nu)\zeta]}{2} \mathrm{d}\zeta$$

Sea

$$F = \frac{F_+ + F_-}{2}$$

donde

$$F_{\pm} = \int_{-a}^{a} \exp\left[j(k' \pm \nu)\zeta\right] \mathrm{d}\zeta$$

integrando:

$$\frac{F_{\pm}}{2} = j\frac{\operatorname{sen}[(k' \pm \nu)a]}{j(k' \pm \nu)}$$

o bien

$$\frac{F_{\pm}}{2} = \frac{\operatorname{sen}[(k' \pm \nu)a]}{k' \pm \nu}$$

con lo que

$$F = \frac{(k' + \nu)\operatorname{sen}[(k' - \nu)a] + (k' - \nu)\operatorname{sen}[(k' + \nu)a]}{k'^2 - \nu^2}$$

$$F = \frac{-(k' + \nu)\cos[k'a] + (k' - \nu)\cos[k'a]}{k'^2 - \nu^2}$$

que queda

$$F = -\frac{2\nu}{k'^2 - \nu^2}\cos(k'a)$$

lo que hace

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = j\frac{\mu_0 \omega I_0 \exp\left(-jkr_P\right)}{4\pi r_P}\operatorname{sen}\theta \frac{2\nu}{\nu^2 - k^2\cos^2\theta^2}\cos(k'a)\boldsymbol{u}_\theta$$

3.- Obtenga el mínimo valor de a que produce una onda estacionaria, superposición de dos que se desplazan con velocidad c en la antena.

$$a = \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4}$$

4.- Asumiendo para a el valor anterior, ontenga el

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \tilde{\boldsymbol{E}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = j\frac{\mu_0 c I_0 \exp\left(-jkr_P\right)}{2\pi r_P \operatorname{sen}\theta}\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\theta$$

con lo que el límite queda

$$j\frac{\mu_0 c I_0 \exp\left(-jkr_P\right)}{2\pi r_P}\boldsymbol{u}_\theta$$

5.- Obtenga el

$$\lim_{\theta \to 0} \tilde{\boldsymbol{E}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0}$$

Si no puede visualizar la animación anterior, pulse en el espacio anterior a estas líneas; si sigue sin verla, pulse aquí

6.- Deduzca el valor de la inducción magnética $\tilde{\boldsymbol{B}}$

Con el modelo de onda plana

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = c^{-1}\boldsymbol{u}_r \times \tilde{\boldsymbol{E}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = j\frac{\mu_0 I_0 \exp\left(-jkr_P\right)}{2\pi r_P \operatorname{sen}\theta}\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\varphi$$

7.- Calcule la densidad de energía en función del tiempo

$$u = \epsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$u = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi^2 c r_P^2 \operatorname{sen}^2\theta}\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)\cos^2(\omega t - kr_P)$$