Cálculo del Coeficiente de Autoinducción

Cuando se consideran dos circuitos filiformes C, C' una intensidad I circulando por C determina un flujo Φ' a través de C' que es directamente proporcional a I.

$$\Phi' = MI$$

El coeficiente M se denomina *coeficiente de inducción mutua* y puede determinarse mediante la *fórmula de Neumann*

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell'}}{r}$$

Puede pensarse en utilizar otro coeficiente (el llamado *coeficiente de autoinducción*) para caracterizar la proporcionalidad entre el flujo que atraviesa el circuito C y la corriente I que circula por C y genera dicho flujo; sin embargo, este flujo, si C es un circuito filiforme, es infinito, la fórmula de Neumann degenera y el coeficiente de autoinducción se hace por tanto infinito.

A partir de la fórmula de la energía de un campo magnetostático generado por la corriente I circulando por C ($E_m = \frac{1}{2}LI^2$), supuesto que C sea un circuito de sección no nula, puede definirse el coeficiente de autoinducción L como

$$L = 2\frac{E_m}{I^2}$$

La energía magnética, supuesto un sistema lineal, es

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{d}v$$

y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ puede escribirse

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{d}v$$

pero como

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

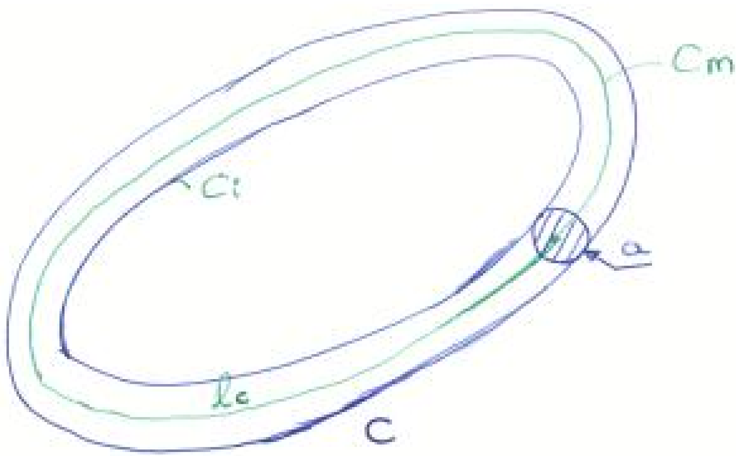
y $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$, entonces

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}v + \frac{1}{2} \oiint (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{J}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

siendo nula la última integral, debido al decrecimiento en el infinito de $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}$, según, al menos r^{-2}, r^{-3} respectivamente. Por lo tanto

$$L = \frac{1}{I^2} \iiint_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}v$$

estando la última integral extendida únicamente al recinto ocupado por el circuito C. En lo que sigue se supone que la corriente I se distribuye uniformemente sobre cada sección normal de C.



Se considera que la sección de conductor es circular y de radio a mucho menor que el radio de curvatura mínimo de la curva media Cm (la curva que pasa por los puntos medios de cada sección). El vector tangente a ésta es $\boldsymbol{t}$ y localmente tomamos la recta tangente como eje polar, en torno al cual se definen las coordenadas ρ, φ como es habitual. Se desprecia la contribución a la variación de $\boldsymbol{A}$ en el conductor de la inducción debida a los puntos lejanos. El campo $\boldsymbol{B}$ se calcula entonces, para puntos del interior, utilizando el teorema de Ampere, con la fórmula

$$2\pi\rho H_\varphi = \pi\rho^2 J$$

$$J = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho \boldsymbol{u}_\varphi$$

dado que

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

y que

$$\boldsymbol{A} = A_z(\rho)\boldsymbol{t}$$

el rotacional queda

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_\rho & \rho\boldsymbol{u}_\varphi & \boldsymbol{t} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\boldsymbol{u}_\varphi$$

por lo que

$$\boldsymbol{A} = \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)\right]\boldsymbol{t} + \boldsymbol{A}_a$$

donde $\boldsymbol{A}_a$ es el valor del potencial vector en la superficie de C, que se calculará poteriormente.

Según lo anterior

$$L = \oint_{Cm} \frac{\boldsymbol{A}_a}{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \frac{\mu_0}{4\pi^2 a^2} \iiint \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \mathrm{d}v \tag{1}$$

o bien, haciendo

$$\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\ell$$

$$L = \oint_{Cm} \frac{\boldsymbol{A}_a}{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \frac{\mu_0}{2\pi a^2} \int_0^{\ell_C} \mathrm{d}\ell \int_0^a \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \rho \mathrm{d}\rho \tag{2}$$

$$L = \oint_{Cm} \frac{\boldsymbol{A}_a}{I} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \frac{\mu_0}{8\pi} \ell_C \tag{3}$$

es decir

$$L = \frac{\Phi_i}{I} + \frac{\mu_0 \ell_C}{8\pi}$$

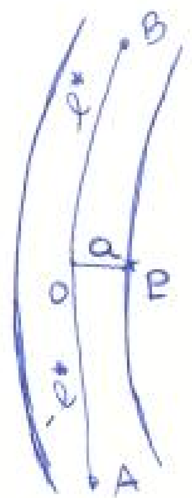
$$L = M_{CmCi} + \frac{\mu_0 \ell_C}{8\pi}$$

El coeficiente M_{CmCi} (a partir de ahora será representado por M) representa la inducción mutua entre dos circuitos filiformes: el de la línea media Cm y otra línea normal a las secciones y que se encuentra en el contorno de C.

El coeficiente M puede evaluarse directamente mediante, por ejemplo, la fórmula de Neumann, o bien proceder de la siguiente forma, que proporciona un valor aproximado del mismo, que será suficiente en la mayor parte de los casos.

Para el cálculo de el coeficiente M se desea evaluar $\boldsymbol{A}_a$

$$\boldsymbol{A}_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{Cm} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{r}$$



Se descompone la integral en el resultado de evaluarla para una *zona próxima* y otra *lejana*. En la primera se considera el campo creado en P por la intensidad que circula entre los puntos A, B situados a abscisas curvilíneas $\pm\ell^*$ a partir del centro O de la sección correspondiente a P, de modo que ℓ^* cumpla $a \ll \ell^* \ll R_c$ donde R_c es el mínimo radio de curvatura de Cm. La integral queda

$$\frac{\mu_0 I \boldsymbol{t}}{4\pi} \int_{-\ell^*}^{+\ell^*} \frac{\mathrm{d}\ell}{\sqrt{a^2+\ell^2}} = \frac{\mu_0 I \boldsymbol{t}}{2\pi} \operatorname{Ash}(\ell^*/a)$$

$$\boldsymbol{A}_a \approx \frac{\mu_0 I \boldsymbol{t}}{2\pi} \ln \frac{2\ell^*}{a}$$

$$\boldsymbol{A}_a \approx 2\frac{\mu_0 I \boldsymbol{t}}{4\pi} \int_{a/2}^{\ell^*} \frac{\mathrm{d}\ell}{\ell}$$

o bien

$$\boldsymbol{A}_a \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell^*>\ell>a/2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{r}$$

La correspondiente a la zona lejana es

$$\boldsymbol{A}_a \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell^*<\ell} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{r}$$

de modo que el total queda

$$\boldsymbol{A}_a \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell>a/2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{r}$$

de forma que

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{r>a/2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell'}}{r}$$

y

$$L = M + \frac{\mu_0 \ell_C}{8\pi}$$