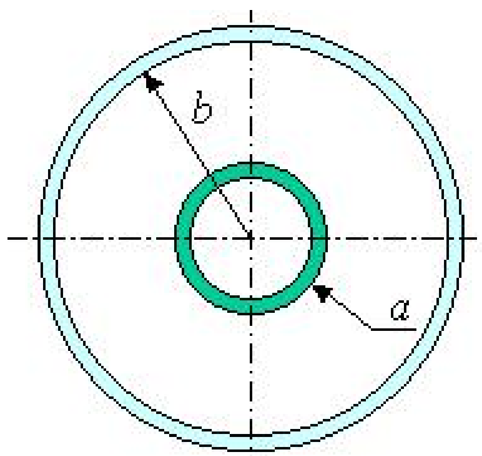
Línea coaxial

Ampliación de Física II



Una línea coaxial está formada por dos buenos conductores metálicos, cilíndricos, huecos finos y coaxiales de radios a, b tales que $b > a$. Una corriente I se dirige hacia el otro lado de la hoja/pantalla por el conductor exterior y hacia el lector por el conductor interior. Puede suponerse que la máxima frecuencia de la corriente $\omega \ll \frac{c}{b}$.

- Determine la inducción magnética en todo el espacio

  Respuesta:

  Al aplicar la ley de Ampere, es evidente que la inducción es nula excepto en el recinto comprendido entre los conductores, donde vale

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{u}_\varphi \tag{1}$$

- Obtenga el potencial vector, tomando origen en la superficie interior del conductor exterior

Respuesta:

Obviamente, el potencial vector, por simetría, sólo depende de ρ y tiene la dirección de la corriente $\boldsymbol{A} = A_z(\rho)\boldsymbol{u}_z$. La relación entre la inducción y el potencial vector es

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_\rho & \rho\boldsymbol{u}_\varphi & \boldsymbol{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(\rho) \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{B} = -A_z'(\rho)\boldsymbol{u}_\varphi \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(b/\rho)\boldsymbol{u}_z \tag{4}$$

- Obtenga la autoinducción por unidad de longitud en la línea

Respuesta:

Puede utilizarse la expresión

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z} = \frac{IA_z(a) - IA_z(b)}{I^2}$$

$$\ell = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(b/a) \tag{5}$$

Se deja como ejercicio de comprobación, utilizar la expresión

$$\ell = \frac{\displaystyle\iint_{a\leq\rho\leq b} B^2 \mathrm{d}S}{\mu_0 I^2}$$

- En la asignatura de Ampliación de Física I se ha visto que la capacidad por unidad de longitud de este tipo de línea es

$$f = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

Determine la ecuación diferencial que verifica la distribución de intensidad a lo largo de la línea

Respuesta:

Al aplicar las ecuaciones de la electrotecnia, se tiene

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \ell f\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

ecuación de una onda escalar unidimensional.

- Determine la velocidad de la onda

RESPUESTA:

Es inmediato que

$$v = \sqrt{\frac{1}{\ell f}} = c$$

Es decir, la velocidad de la luz

- Obtenga la impedancia de la línea

RESPUESTA:

Dado que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\ell \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$j\omega \tilde{u} = j\omega c\ell \tilde{i}$$

$$\tilde{u}/\tilde{i} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi^2 \epsilon_0}} \ln(b/a)$$

El mismo resultado podría haberse obtenido mediante la integración del vector de Poynting

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\rho} \boldsymbol{u}_\rho \right) \times \left(\frac{I}{2\pi\rho} \boldsymbol{u}_\varphi \right) = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0 \rho^2} \boldsymbol{u}_z$$

$$P = \iint \boldsymbol{P} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{\lambda I}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \Rightarrow j\omega\tilde{\lambda} - jk\tilde{I} = 0$$

$$\lambda = \frac{I}{c}$$

con lo que

$$P = \frac{I^2}{2\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{b}{a}$$

y

$$\tilde{u}/\tilde{i} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{b}{a}$$