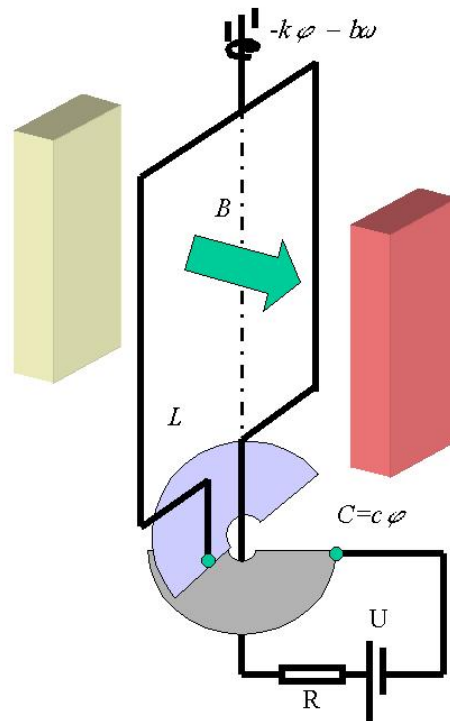


# Fundamentos de electromecánica



## Índice

1. Introducción	3
2. Fuerzas ejercidas por el campo magnético	3
3. Componentes generalizadas de las fuerzas magnetostáticas	5
4. Expresión del trabajo	7
5. Expresión de la fuerza entre corrientes	8
6. Coeficientes de inducción mutua	8
7. Ley de Faraday-Henry	10
8. Energía	12
9. Fuerzas generalizadas	12
10. Sistema de dos circuitos	13

11. Breve recopilación electrotécnica	14
12. Lagrangiana electromecánica	15
13. Ecuaciones de Maxwell-Lagrange	16
14. Consideraciones prácticas	16
15. Energía de un sistema de corrientes en presencia de materiales magnéticos	17
16. Diamagnetismo y paramagnetismo	17
17. Campos en presencia de ferromagnéticos blandos	20
18. Circuitos magnéticos	21
19. Ferromagnéticos duros	24
20. Energía	27
21. Acciones mecánicas	29

## 1. Introducción

Este documento corresponde a unas notas que resumen algunos temas de campos electromagnéticos y dada su provisionalidad pueden contener erratas. No son en modo alguno un texto de ninguna asignatura.

## 2. Fuerzas ejercidas por el campo magnético

Cuando existe una distribución de corriente (volumínica, superficial o lineal) en el seno de un campo magnético, éste ejerce una fuerza sobre dicha distribución de corriente, la cual, según el caso, se expresa

- Si se tiene una densidad volumínica de corriente  $\mathbf{j}$  entonces aparece una densidad volumínica de fuerza

$$d^3\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}dV$$

- Si se tiene una densidad superficial de corriente  $\boldsymbol{\lambda}$  entonces aparece una densidad superficial de fuerza

$$d^2\mathbf{F} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{B}dS$$

- Si se tiene una corriente lineal  $I$  que circula entre los puntos  $P, Q$ , entonces aparece una densidad de fuerza por unidad de longitud

$$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

y un momento elemental respecto al origen de vectores de posición:

$$d\mathbf{N}_O = I \mathbf{r} \times (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

de modo que la fuerza y el momento resultan

$$\mathbf{F} = I \int_P^Q d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{N}_O = I \int_P^Q \mathbf{r} \times (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

Si se considera este último caso, la fuerza neta sobre la espira resulta ser

$$\mathbf{F} = \oint_C d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

que, en el caso de una inducción magnética constante es nula. El momento resulta

$$\mathbf{N}_O = \oint_C \mathbf{r} \times (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

el cual, si  $\mathbf{B}$  es constante, no depende del punto  $O$  y puede escribirse

$$\mathbf{N} = \oint_C \mathbf{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

Por otra parte, el integrando puede escribirse

$$\mathbf{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} - (\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\mathbf{B} \quad (2)$$

además

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \mathbf{B} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} - (\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\mathbf{r} \\ \mathrm{d}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + (\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\mathbf{r} \end{aligned}$$

de modo que sumando estas dos ecuaciones se tiene

$$(\mathbf{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \mathbf{B} + \mathrm{d}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \quad (3)$$

Si se combina (2) con (3) queda

$$\mathbf{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B}$$

que insertada en la ecuación (1) y anulando las integrales sobre el circuito cerrado  $C$  de diferenciales exactos resulta

$$\mathbf{N} = \left( \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \right) \times \mathbf{B}$$

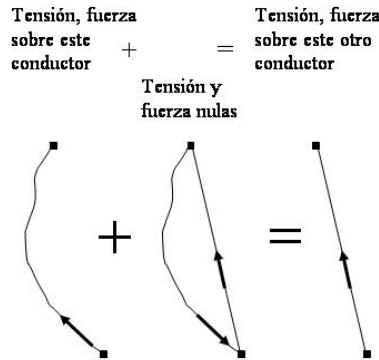
que, utilizando la definición de momento magnético  $\mathbf{m}$  de la espira, puede escribirse

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

ecuación válida para cualquier distribución de corrientes que se encuentre en el seno de una inducción magnética uniforme  $\mathbf{B}$ , aunque no sea lineal.

Puede comprobarse que el par aplicado sobre una espira siempre tiende a alinear su momento magnético con el campo inducción magnética intentando hacer coincidir sus sentidos.

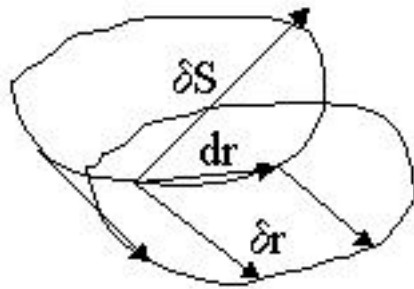
Es inmediato que la resultante y momento sobre un circuito de momento magnético  $\mathbf{m}$  debidos a una inducción uniforme, paralela a  $\mathbf{m}$  y constante son nulas. Esto permite que, cuando se tengan que calcular estas acciones mecánicas sobre un tramo de conductor, pueda añadirse un circuito cuyo momento magnético sea paralelo a la inducción, uno de cuyos tramos anule el conductor inicial, y el resto permita un cálculo ágil. Por ejemplo, cuando se tiene una superficie conductora plana por la que circula corriente entre dos terminales puntuales, entonces, si toda la superficie se supone inmersa en una inducción magnética uniforme y constante, perpendicular a dicha superficie, se puede, para calcular la fuerza, suponer que toda la corriente circula por el segmento que une los terminales (lo mismo sucede para calcular la tensión inducida, según se verá más adelante).



### 3. Componentes generalizadas de las fuerzas magnetostáticas

El origen de las fuerzas motrices en mecanismos accionados por relés, motores u otros sistemas electromecánicos, es magnético en su inmensa mayoría. El tratamiento generalizado desarrollado por la mecánica analítica puede incluir este tipo de fuerzas, de modo que el planteamiento de las ecuaciones mecánicas sea directo. Para ello se necesita disponer de una expresión de validez general para las fuerzas generalizadas de origen magnético.

Se puede considerar un sistema mecánico  $\mathcal{S}$  posicionado por  $n$  coordenadas independientes  $q_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  que incluye una espira recorrida por una corriente  $I$ . La generalización a sistemas con distribuciones cualesquiera de corrientes será inmediata tras el análisis de lo que sucede para el caso considerado.



La definición de  $k$ -ésima componente generalizada ( $k \in \{1, \dots\}$ ) de un sis-

tema de  $f$  fuerzas  $\mathbf{F}_i$  aplicadas en los  $f$  puntos posicionados por  $\mathbf{r}_i$  es

$$Q_k = \sum_{i=1}^f \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

En el caso que nos ocupa

$$Q_k = I \oint_C \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B})$$

o bien, realizando una permutación circular en el producto mixto indicado

$$Q_k = I \oint_C \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \quad (5)$$

El producto

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

representa la superficie elemental barrida por el elemento  $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$  del contorno de espira  $C$  referida a  $\delta q_k$  cuando el resto de cordenadas generalizadas permanece constante, de modo que si  $\mathbf{B}$  no depende de  $q_k$ , (5) puede escribirse

$$Q_k = I \frac{1}{\delta q_k} \iint_{\delta S} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad (6)$$

donde  $\delta S$  es el área barrida por  $C$ . Finalmente

$$Q_k = I \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \quad (7)$$

El campo magnético creado por espiras rígidas no produce ni resultante ni momento sobre ellas mismas, por lo que se puede considerar sólo el campo creado por fuentes exteriores para obtener la resultante y el par motor. Si la espira puede girar en torno a un eje  $z$  y se posiciona mediante el ángulo  $\alpha$  girado respecto a una posición de referencia, entonces el momento áxico respecto a  $z$  que recibe del campo magnético es

$$N_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \quad (8)$$

Si se posiciona un punto de la espira (por ejemplo, su centro de masas) mediante sus coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  entonces la fuerza que experimenta es

$$\mathbf{F} = I \nabla \Phi$$

Cuando la inducción magnética es uniforme, entonces la ecuación (6) queda

$$Q_k = \left( I \frac{\partial \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S}}{\partial q_k} \right) \cdot \mathbf{B} \quad (9)$$

$$Q_k = \frac{\partial \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}}{\partial q_k} \quad (10)$$

En muchos sistemas electromecánicos se tienen corrientes dispuestas en solenoides cuya densidad lineal de vueltas es  $n$  lo que determina densidades superficiales de corriente  $\lambda$

$$\lambda = In \quad (11)$$

El problema de considerar el flujo del campo generado por la corriente de la espira es que resulta divergente. El problema desaparece si se consideran distribuciones superficiales de corriente.

El flujo total resulta ser

$$\int n\Phi d\ell$$

donde  $\ell$  es el elemento de cota sobre el centro de cada sección normal de solenoide. Este flujo total recibe el nombre de *flujo entrelazado*. La fuerza generalizada es entonces

$$Q_k = \frac{\partial \int_a^b \lambda(\ell)\Phi(\ell)d\ell}{\partial q_k} \quad (12)$$

Si se tiene un solenoide de longitud  $L$  inmerso en un campo magnético que es débil en su extremo  $\ell = a$ , aunque no lo es en su otro extremo, entonces, la fuerza axial  $F_z$  es

$$F_z = \lambda\Phi(b) \quad (13)$$

## 4. Expresión del trabajo

Si se elige un sistema de coordenadas para el posicionamiento de una espira que haga el sistema esclerónimo, entonces

$$\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}$$

y el trabajo desarrollado por el campo es

$$\delta W = \sum Q_k dq_k = \sum \frac{\partial I\Phi}{\partial q_k} dq_k = d(I\Phi) \quad (14)$$

Si la espira se desplaza entre dos posiciones cualesquiera, entonces el trabajo mecánico desarrollado por la inducción sobre la espira es

$$W = I\Delta\Phi \quad (15)$$

de modo que en un camino cíclico, no existe desarrollo neto de trabajo. Si se trata de un solenoide, entonces

$$W = \Delta \left( \int \lambda(\ell)\Phi(q_1, \dots, q_n, \ell)d\ell \right) \quad (16)$$

En los motores eléctricos, para evitar esta limitación, la intensidad no se mantiene constante.

## 5. Expresión de la fuerza entre corrientes

En esta sección se expresa la fuerza entre dos corrientes  $I_1, I_2$  que recorren las curvas  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . La inducción creada por la corriente  $I_2$  en un punto de la curva  $\Gamma_1$  es

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_2 \frac{d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r^3}$$

y la fuerza neta es

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2/1} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 d\mathbf{r}_2 \times \oint_2 \frac{d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r^3} \\ \mathbf{F}_{2/1} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{r^3} \end{aligned}$$

que, llamando  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2/1} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{r}_2 \times (d\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r})}{r^3} \\ \mathbf{F}_{2/1} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r} d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1 \mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{F}_{2/1} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1 \mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (17)$$

ya que la integral

$$\oint_2 d\mathbf{r}_2 \oint_1 \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_1}{r^3}$$

es igual a

$$\oint_2 d\mathbf{r}_2 \oint_1 d\frac{1}{r}$$

que es nula por ser la integral cíclica de un diferencial.

## 6. Coeficientes de inducción mutua

En esta sección se desea obtener una relación entre la corriente que circula por un circuito  $C_1$  y el flujo de la inducción magnética que crea a través de otro circuito  $C_2$ .

El campo de inducción magnética creado por la corriente  $I_1$  que circula por  $C_1$  es  $\mathbf{B}_1$  y puede expresarse en función del potencial vector creado por la misma corriente  $\mathbf{A}_1$  mediante la expresión

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$$

El flujo de este campo a través del circuito  $C_2$  es  $\Phi_{21}$  y, dado que  $\mathbf{B}_1$  es adivergente es el mismo evaluado sobre cualquier superficie  $\Sigma$  cuyo contorno sea  $C_2$

$$\Phi_{21} = \iint_{\Sigma} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}$$



que utilizando el potencial vector queda

$$\Phi_{21} = \iiint_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}$$

o bien, aplicando el teorema de Stokes

$$\Phi_{21} = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r}_2$$

y utilizando la expresión de  $\mathbf{A}_1$  en función de la corriente que lo crea

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{r}_1}{r_{21}}$$

resulta

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{r_{21}}$$

o bien

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1 \quad (18)$$

donde  $M_{21}$  recibe el nombre de *coeficiente de inducción mutua entre los circuitos  $C_1, C_2$* .

Puede escribirse

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{r_{21}} \quad (19)$$

que recibe el nombre de *fórmula de Neumann*.

Una primera propiedad de los coeficientes de inducción mutua es que son simétricos, lo cual se deduce directamente de la simetría de la fórmula de Neumann (19).

$$M_{21} = M_{12}$$

En general, el coeficiente  $M_{ij}$  representa la relación entre el flujo que crea a través de  $C_i$  una corriente  $I$  circulando por  $C_j$  y la propia corriente. El coeficiente  $L_i = M_{ii}$  recibe el nombre de *coeficiente de autoinducción* y representa el flujo por unidad de intensidad que una corriente circulando por  $C_i$  crea en el propio circuito  $C_i$ . Dada la linealidad de la relación entre flujos y corrientes, puede definirse una *matriz de inductancias  $L$*  para un sistema de  $n$  espiras

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_n \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

o bien

$$\underline{\Phi} = \underline{LI}$$

Puede demostrarse (lo haremos en otro lugar) que la matriz de inductancias es definida positiva, lo cual, en sistemas de dos conductores implica

$$L_1 L_2 \geq M^2$$

A partir de la fórmula de Neumann puede deducirse la fuerza entre dos corrientes mediante la expresión

$$\mathbf{F}_{21} = I_1 I_2 \nabla M$$

## 7. Ley de Faraday-Henry

En las lecciones anteriores se han analizado con detalle las acciones mecánicas que el campo de inducción magnética realiza sobre circuitos fijos o móviles que se encuentran en su espacio de influencia. Estas acciones pueden aportar o consumir energía mecánica de los sistemas materiales de los que forman parte dichos conductores. Esta energía tiene un origen (en el caso de los motores) o un destino (en el caso de los generadores) de naturaleza eléctrica. En esta sección se van a estudiar las acciones eléctricas que un campo magnético induce en un circuito eléctrico y que reciben el nombre de *inducción electromagnética*.

Se denomina *fuerza electromotriz inducida en un circuito C* al trabajo por unidad de carga realizado al recorrer dicho circuito. Es decir

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (20)$$

A continuación se va a relacionar la  $\mathcal{E}$  anterior con la derivada respecto al tiempo del flujo que atraviesa el circuito  $C$ . En efecto, considérese el volumen  $\tau$  encerrado entre las siguientes superficies:

- Una superficie  $\Sigma$  cuyo contorno sea  $C$  (orientada por lo tanto congruentemente con  $C$ ).
- Una superficie  $\Sigma'$  cuyo contorno sea  $C'$ , que es la posición de  $C$  en  $t' = t + \Delta t$ .
- La superficie lateral  $\Lambda$  barrida por el circuito en el intervalo  $\Delta t$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradsky se tiene

$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{B} dv = - \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Lambda} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Si  $\Delta t \rightarrow 0$

$$- \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v} \Delta t)$$

La derivada del flujo

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

es debida tanto a la variación de  $\mathbf{B}$  como al desplazamiento de  $C$ . Esta última puede escribirse

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{- \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta t}$$

que es

$$- \oint_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

la variación debida a la de  $\mathbf{B}$  es

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

con lo que

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (21)$$

o bien

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (22)$$

que constituye la *ley de inducción de Faraday-Henry*. Es inmediato comprobar que la fuerza electromotriz inducida impulsa las cargas a circular de forma que creen un campo que se oponga a la variación del flujo magnético (*ley de Lenz*).

De esta forma, en un circuito atravesado por un flujo  $\Phi$  en el que existan, además, una resistencia  $R$  una fuente de tensión  $U$  y un condensador de capacidad  $C$ , la segunda ley de Kirchhoff se escribe

$$U = C\dot{q} + R\dot{q} + \frac{d\Phi}{dt}$$

y si el flujo es

$$\Phi = Li + \Psi$$

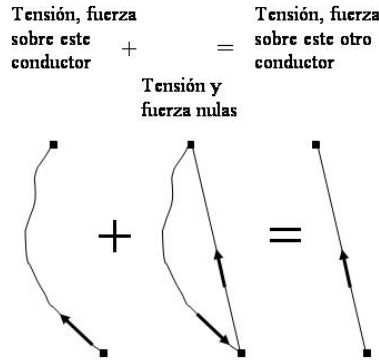
$$U = C\dot{q} + R\dot{q} + Li + \frac{d\Psi}{dt}$$

Si se considera una línea de corriente PQ que se mueve en el seno de un campo magnético constante, entonces éste producirá una tensión en la misma, que puede calcularse como

$$V_Q - V_P = \int_P^Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Es inmediato que la fuerza electromotriz sobre un circuito cerrado debida a una inducción uniforme y constante es nula. Esto permite que, cuando se tengala tensión sobre un tramo de conductor, pueda añadirse un circuito cuyo momento magnético sea paralelo a la inducción, uno de cuyos tramos anule el conductor

inicial, y el resto permita un cálculo ágil. Por ejemplo, cuando se tiene un tramo de conductor entre dos terminales puntuales, entonces, si existe una inducción uniforme y constante, se puede, para calcular la tensión entre dichos terminales, suponer que toda la corriente circula por el segmento que une los terminales (algo parecido sucede para calcular las acciones mecánicas según se ha dicho anteriormente).



## 8. Energía

La ley de Faraday permite obtener la energía necesaria para establecer un sistema de corrientes. Sea un sistema con  $n$  circuitos recorridos por un vector de intensidades  $\underline{I}$ . Se va a calcular la energía necesaria para incrementar las corrientes desde un valor nulo hasta dicho vector, todas a la vez y de modo proporcional a su valor final. Es decir, en un instante  $t$ , el vector de corrientes vale  $\underline{I}t/T$ . La tensión necesaria en cada circuito es la opuesta a la inducida, de modo que el trabajo es

$$dE_m = \underline{I} \cdot d\underline{\Phi} = \underline{I} \cdot \underline{L}d\underline{I}$$

y la energía es

$$E_m = \frac{1}{2} \underline{I} \cdot \underline{L} \cdot \underline{I} \quad (23)$$

## 9. Fuerzas generalizadas

A partir de la expresión de la energía (23), puede obtenerse una expresión para la fuerza generalizada desarrollada sobre un sistema mecánico. En efecto, si se tiene un sistema mecánico que puede evolucionar mediante variaciones de sus  $m$  coordenadas generalizadas  $q_k$ , manteniendo fijos los flujos de los circuitos, se tiene,

$$\delta E_m = - \sum_{k=1}^m Q_k \delta q_k$$

En el primer miembro, si se utiliza la inversa de la matriz  $\underline{\underline{L}}$ , que llamaremos matriz de coeficientes de flujo  $\underline{\underline{F}}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\delta E_m &= \frac{1}{2} \delta(\underline{\Phi}^t \underline{\underline{F}} \underline{\Phi}) = \\ \delta E_m &= \frac{1}{2} \underline{\Phi}^t \delta \underline{\underline{F}} \underline{\Phi} = \\ \delta E_m &= \frac{1}{2} \underline{\Phi}^t \sum_k = 1^m \left( \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial q_k} \delta q_k \right) \underline{\Phi}\end{aligned}$$

pero

$$\underline{\underline{L}} \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \frac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial q_k} \underline{\underline{F}} = -L \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial q_k}$$

y

$$\frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial q_k} = - \underline{\underline{F}} \frac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial q_k} \underline{\underline{F}}$$

de modo que

$$\delta E_m = -\frac{1}{2} \underline{\underline{I}}^t \sum_k = 1^m \left( \frac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial q_k} \delta q_k \right) \underline{\underline{I}}$$

de donde

$$Q_k = \frac{1}{2} \underline{\underline{I}}^t \frac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial q_k} \underline{\underline{I}} \quad (24)$$

o bien

$$Q_k = -\frac{1}{2} \underline{\Phi}^t \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial q_k} \underline{\Phi} \quad (25)$$

Si existe algún flujo  $\underline{\Psi}$  de un campo originado por otro elemento que no sea ninguno de los circuitos contemplados en la matriz  $\underline{\underline{L}}$ , entonces, obviamente,

$$Q_k = \frac{1}{2} \underline{\underline{I}}^t \frac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial q_k} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}}^t \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial q_k} \quad (26)$$

o bien

$$Q_k = -\frac{1}{2} \underline{\Phi}^t \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial q_k} \underline{\Phi} + \underline{\underline{I}}^t \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial q_k} \quad (27)$$

## 10. Sistema de dos circuitos

Sean dos circuitos eléctricos  $e_1, e_2$  en los que existen resistencias  $R_1, R_2$ , fuentes de tensión  $U_1, U_2$  y matriz de coeficientes de inducción

$$\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$$

con todos sus elementos constantes excepto  $M$  que depende de la posición relativa entre ambos circuitos, parametrizada por la coordenada  $\alpha$ , que determina

la posición del segundo circuito, mientras que el primero es fijo. La componente generalizada según  $\alpha$  del resto de fuerzas que actúa sobre  $e_2$  es  $Q_\alpha$ . La evolución del sistema está definida por las ecuaciones que rigen el funcionamiento del circuito

$$U_1 = L_1 \dot{i}_1 + M \dot{i}_2 + i_2 M' \dot{\alpha} + R_1 i_1 \quad (28)$$

$$U_2 = L_2 \dot{i}_2 + M \dot{i}_1 + i_1 M' \dot{\alpha} + R_2 i_2 \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = i_1 i_2 M' + Q'_\alpha \quad (30)$$

que forman un sistema de tres ecuaciones para tres incógnitas  $i_1, i_2, \alpha$ .

Es fácil seguir el camino de la energía a partir de este sistema. En efecto, multiplíquense las ecuaciones anteriores por  $i_1, i_2$  respectivamente y súmense. El resultado es

$$U_1 i_1 + U_2 i_2 + i_1 i_2 M' \dot{\alpha} = \frac{dE_m}{dt} + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

que representa el balance energético sobre la parte eléctrica: la potencia entregada por las fuentes se utiliza en el aumento de la energía magnética, más energía disipada por las resistencias más un término

$$-i_1 i_2 M' \dot{\alpha}$$

que es precisamente la energía transvasada al sistema mecánico, el cual verifica que la energía que recibe es precisamente

$$Q'_\alpha \dot{\alpha} + i_1 i_2 M' \dot{\alpha}$$

## 11. Breve recopilación electrotécnica

La Electrotecnia<sup>1</sup> proporciona métodos de análisis sistemáticos que permiten plantear las ecuaciones que rigen la evolución de circuitos eléctricos.

Desde un punto de vista formal, un circuito eléctrico es un *grafo*, es decir un par de conjuntos  $(N, R)$ , el primero de ellos es el *conjunto de nodos* y el segundo es el *conjunto de ramas* que está formado por pares orientados de nodos. A cada nodo se le puede asignar una tensión  $V$  y a cada rama una intensidad  $I$ .

Las leyes que rigen el funcionamiento eléctrico del sistema son las *leyes de Kirchhoff*.

La *primera ley de Kirchhoff (K1)* establece que la suma de las intensidades de todas las ramas que llegan a un nodo menos las de las que salen de él es nula.

Por consiguiente, en un circuito eléctrico las intensidades de todas las ramas no son independientes, sino que pueden expresarse en función de un subconjunto de ellas. Una forma de elegir un conjunto de corrientes independiente es la que se basa en el análisis de los *lazos* del circuito.

<sup>1</sup>Ver TEORÍA DE CIRCUITOS. Parra Prieto, Pastor, Pérez Coyto, et al. UNED.

Se define *árbol generador del circuito* a un subgrafo del mismo que contenga a todos sus nodos, no lo desconecte y que no pueda perder ninguna rama sin que desconecte el grafo. Un árbol no contiene ningún circuito. El resto de ramas reciben el nombre de *cuerdas*. Las intensidades de las cuerdas son independientes. Al añadir cada una de ellas individualmente al árbol se genera un circuito, llamado *lazo básico*. La intensidad de la cuerda que genera el *lazo básico* recibe el nombre de *intensidad de lazo*.

La *segunda ley de Kirchhoff (K2)* establece que la fuerza electromotriz sobre cada circuito es nula. Esta ley está implícita en la asignación de una tensión a cada nodo. Su aplicación a cada bucle del circuito generaría un sistema de ecuaciones redundante; sin embargo, si se aplica a cada *lazo básico*, se obtiene un sistema de ecuaciones independiente.

Al aplicar la segunda ley de Kirchhoff al k-ésimo lazo básico, expresando las corrientes en las ramas en función de las intensidades de lazo

$$U_k = \sum_{j=1}^L R_{kj} I_j + \sum_{j=1}^L P_{kj} Q_j + \frac{d\Phi_k}{dt} \quad (31)$$

o bien, en forma matricial

$$\underline{U} = \underline{R} \underline{I} + \underline{P} \underline{Q} + \frac{d\underline{\Phi}}{dt} \quad (32)$$

donde

$$\underline{\Phi} = \underline{L} \underline{I} + \underline{\Psi} \quad (33)$$

siendo  $\underline{\Psi}$  el vector de flujos cuyo origen se encuentre fuera del sistema.

## 12. Lagrangiana electromecánica

Si se define la lagrangiana eléctrica  $L_e$  del circuito referido en la sección anterior mediante la fórmula

$$L_e = \frac{1}{2} \dot{\underline{Q}}^t \underline{L} \dot{\underline{Q}} + \dot{\underline{Q}}^t \underline{\Psi} - \frac{1}{2} \underline{Q}^t \underline{P} \underline{Q} - \underline{Q}^t \underline{U} \quad (34)$$

y la función de disipación de Rayleigh eléctrica

$$\mathcal{R}_e = -\frac{1}{2} \dot{\underline{Q}}^t \underline{R} \dot{\underline{Q}} \quad (35)$$

La ecuación (32) puede escribirse

$$\frac{d}{dt} \left( \nabla_{\dot{\underline{Q}}} L_e \right) - \nabla_{\underline{Q}} L_e = \nabla_{\dot{\underline{Q}}} \mathcal{R}_e \quad (36)$$

es decir, se ajusta a la formulación lagrangiana de la evolución de un sistema. Dado que la fuerza generalizada según la k-ésima coordenada generalizada mecánica es

$$F_k = \frac{\partial L_e}{\partial q_k}$$

según se ha visto en clase, la evolución del sistema puede describirse mediante la definición de una *función lagrangiana electromecánica*

$$L = L_m + L_e \quad (37)$$

la cual, junto a la *función de disipación electromecánica de Rayleigh*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_m + \mathcal{R}_e \quad (38)$$

y un posible conjunto adicional de fuerzas generalizadas  $F_k$  no incluidas en las funciones anteriores, determina la evolución electromecánica del sistema en el que se han tomado como coordenadas generalizadas las mecánicas más las cargas  $Q_k = \int_0^t I_k dt$ . Dado que la formulación lagrangiana es invariante frente a cambios de coordenadas, la elección de éstas puede ser arbitraria.

### 13. Ecuaciones de Maxwell-Lagrange

De acuerdo con la sección anterior, puede considerarse un sistema electromecánico posicionado por las cargas que han pasado por cada rama, además de las coordenadas geométricas que determinen la posición de cada punto del sistema. La evolución de todo este conjunto de coordenadas sigue, como se desprende de lo anterior, unas leyes semejantes a las de los sistemas mecánicos.

Por consiguiente, si se denomina  $\underline{q}$  al conjunto de coordenadas generalizadas electromecánicas, la evolución del sistema viene dada por

$$\frac{d(\nabla_{\dot{\underline{q}}} L)}{dt} - \nabla_{\underline{q}} L = \nabla_{\dot{\underline{q}}} \mathcal{R} + \underline{F} \quad (39)$$

que reciben el nombre de *ecuaciones de Lagrange - Maxwell* o de *Maxwell-Lagrange*.

### 14. Consideraciones prácticas

Las ecuaciones del movimiento raramente pueden ser integradas elementalmente; sin embargo, existen algunas estrategias de inspección que pueden desvelar el comportamiento de los sistemas. Se enuncian a continuación algunas de ellas.

- Cuando no aparezca explícitamente el tiempo en la función laplaciana, pueden buscarse las posiciones de equilibrio, anulando las velocidades generalizadas y resolviendo el sistema resultante. Si alguna coordenada no apareciese, se buscaría la situación estacionaria con su primera derivada nula, etc. Una vez encontrada la solución estacionaria, se pueden linealizar las ecuaciones dinámicas en torno a dicha solución, para estudiar los transitorios.



- Si existe un rotor con momento de inercia elevado, entonces puede suponerse que la velocidad de rotación es prácticamente constante, sustituir el par por su valor medio y encontrar el régimen de giro (la rotación en régimen permanente) en base a estas hipótesis.
- Si hay términos sinusoidales en el tiempo, puede buscarse una solución con las mismas características.

## 15. Energía de un sistema de corrientes en presencia de materiales magnéticos

Como se ha visto en las lecciones dedicadas al magnetismo en la materia, suelen aparecer fenómenos de saturación e histéresis que rompen la relación lineal entre las fuentes del campo y la magnetización que aparece en los materiales. En estas condiciones, la relación entre las corrientes de conducción y los flujos enlazados por los circuitos no puede representarse por una matriz, sino que existen (en el caso de  $n$  circuitos),  $n$  funciones

$$\Phi_i(\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_n)$$

que permiten definir la *energía magnética*

$$E_m = \int_0^{\dot{Q}} \underline{\Phi} d\underline{\dot{Q}} \quad (40)$$

y verifican

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{Q}_i}$$

de forma que

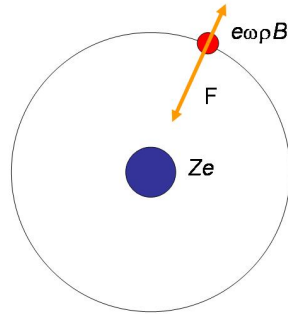
$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{\partial E_m}{\partial \dot{Q}_i}$$

En el caso de existencia de un ciclo de histéresis, cuando el funcionamiento del magnético acontece entre dos curvas bien definidas, el vector de flujos también tiene dos expresiones, y pueden definirse dos energías magnéticas; cada una sirve para una mitad del ciclo.

## 16. Diamagnetismo y paramagnetismo

Cuando una sustancia se expone a un campo magnético, éste actúa sobre sus orbitales electrónicos y sus espines. El efecto tiene dos aspectos

- Eléctrico. Por la ley de Faraday-Henry, al aplicar una inducción sobre un circuito, se genera una fuerza electromotriz que tiende a disminuir la variación de flujo a través de dicho circuito. En el caso de los orbitales, dado que su resistencia es nula, lo que sucede es una variación de la corriente que mantiene el flujo magnético constante.



b.- Mecánico. Si existe un momento magnético antes de aplicar el campo, entonces éste interactúa mecánicamente con aquél, tendiendo a alinear momento y campo.

El primer efecto (eléctrico) se presenta en todas las sustancias y tiene como consecuencia el debilitamiento del campo aplicado en los dominios que ocupe el material, el cual recibe el calificativo de *diamagnético*. El diamagnetismo es prácticamente independiente de la temperatura y está presente en todas las sustancias, aunque en las que presentan un momento magnético intrínseco, como se expone en el siguiente párrafo, puede estar ocultado por el paramagnetismo. Las sustancias diamagnéticas son repelidas de las zonas de mayor inducción magnética.

$$\mathbf{f} \approx \frac{\chi_m}{2\mu_0} \nabla B^2 \quad \chi_m < 0$$

El segundo efecto (mecánico) sólo aparece en sustancias cuyos constituyentes presentan momentos magnéticos y refuerza el campo en la zona ocupada por el material. Estas sustancias reciben el calificativo de *paramagnéticas*. La orientabilidad de los componentes de estos materiales será tanto más difícil cuanto mayor sea la temperatura. Puede deducirse la relación entre ésta y la susceptibilidad magnética, de forma paralela a la obtención de la fórmula de *Langevin*

$$\chi_m = \frac{N\mu_0 m^2}{3kT}$$

Esta fórmula recibe el nombre de *Ley de Curie*. Para temperaturas altas, el comportamiento paramagnético puede ser tan débil que el efecto predominante sea el diamagnetismo. Las sustancias paramagnéticas son atraídas hacia las zonas de mayores valores de la inducción.

$$\mathbf{f} \approx \frac{\chi_m}{2\mu_0} \nabla B^2 \quad \chi_m > 0$$

Suele utilizarse un modelo aproximado para estimar la susceptibilidad magnética de las sustancias diamagnéticas, partiendo de la órbita de un electrón en torno

a un núcleo atómico, en la que se tiene

$$F = m_e \omega^2 \rho$$

Al aplicar un campo magnético  $B$ , aparece una fuerza hacia el exterior de la órbita, de valor  $eB\omega\rho$ , de modo que

$$-eB\omega\rho = 2m_e\omega\Delta\omega\rho$$

de donde

$$\Delta\omega = -\frac{eB}{2m_e}$$

Dado que un electrón puede asimilarse a una corriente que desplaza su carga cada  $2\pi/\omega$

$$I_e = \frac{e\omega}{2\pi}$$

con un momento magnético

$$\mathbf{m} = \frac{e\omega\rho^2}{2}$$

se tiene un incremento de momento magnético

$$\Delta\mathbf{m} = -\frac{e^2\rho^2}{4m_e}\mathbf{B}$$

y la magnetización queda

$$\mathbf{M} = -\frac{NZe^2 \langle \rho^2 \rangle}{4m_e}\mathbf{B}$$

donde  $N$  es la densidad de átomos por unidad de volumen,  $Z$  el número atómico de la sustancia,  $\langle \rho^2 \rangle$  es el valor medio de las distancias de las posiciones de las órbitas al eje según el cual se aplica  $\mathbf{B}$ . O bien

$$\mathbf{M} = -\frac{N\mu_0Ze^2 \langle R^2 \rangle}{6m_e}\mathbf{H}$$

donde se ha utilizado la propiedad

$$\langle R^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 3 \langle x^2 \rangle$$

$$\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = 2 \langle x^2 \rangle$$

y se ha aproximado el campo  $v\mathbf{b}H \approx \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ . La susceptibilidad diamagnética queda

$$\chi_m = -\frac{N\mu_0Ze^2 \langle R^2 \rangle}{6m_e}$$

Los órdenes de magnitud de  $\chi_m$  en sustancias diamagnéticas dependen fuertemente de la densidad. En general son mayores para sólidos (del orden de  $10^{-4}$ ) y líquidos (del orden de  $10^{-5}$ ) que para gases (del orden de  $10^{-9}$ ). En la siguiente tabla se representan los valores de la susceptibilidad magnética para diferentes sustancias a  $20^\circ$ .

Gold	$-3.6 \times 10^{-5}$
Copper	$-0.98 \times 10^{-5}$
Germanium	$-1.5 \times 10^{-5}$
Tungsten	$+6.8 \times 10^{-5}$
Aluminium	$+2.3 \times 10^{-5}$
Magnesium	$+1.2 \times 10^{-5}$
Glass	$-1.1 \times 10^{-4}$
Fused Quartz	$-6.2 \times 10^{-5}$
Nitrogen (76 cm Hg pressure)	$-6.7 \times 10^{-9}$
Oxygen (76 cm Hg pressure)	$+1920.0 \times 10^{-9}$
Helium (76 cm Hg pressure)	$-1.05 \times 10^{-9}$
Argon (76 cm Hg pressure)	$-11.0 \times 10^{-9}$
Krypton (76 cm Hg pressure)	$-11.1 \times 10^{-9}$
Xenon (76 cm Hg pressure)	$-24.6 \times 10^{-9}$
Water	$-9.1 \times 10^{-6}$
Sodium Chloride	$-1.38 \times 10^{-5}$

## 17. Campos en presencia de ferromagnéticos blandos

En la mayor parte de los sistemas electromecánicos en los que se utilizan materiales ferromagnéticos, éstos se eligen de forma que su histéresis sea despreciable y su comportamiento puede asimilarse al de un paramagnético cuya susceptibilidad magnética sea muy grande  $\chi_m \gg 1$ , de modo que puede aproximarse de forma muy precisa la distribución de campos magnéticos suponiendo que es infinita, con lo que

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \gg \mu_0$$

y

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \approx \mathbf{0}$$

en los dominios ocupados por los materiales ferromagnéticos blandos.

Estas consideraciones permiten enunciar dos propiedades importantes sobre la distribución de la inducción magnética

- 1.- *Transversalidad.* El campo  $\mathbf{H}$  en el exterior de los materiales ferromagnéticos es normal a las superficies que los limitan. Efectivamente, dado que la componente tangencial de  $\mathbf{H}$  es continua a través de las superficies de separación de dos medios y en el ferromagnético es nula, también lo será en el

exterior. Por lo tanto, también  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  ( $\mu$  es la permeabilidad del medio exterior al ferromagnético) será normal a estas superficies.

- 2.- *Apantallamiento.* Si un ferromagnético encierra un dominio  $\tau$ , entonces las corrientes exteriores al ferromagnético y a  $\tau$  no producen campo  $\mathbf{B}$  en  $\tau$  y viceversa; las corrientes de  $\tau$  no producen inducción magnética en el exterior. Efectivamente, si alguna línea de campo  $\mathbf{H}$  se cerrase por el exterior, la circulación de este campo sobre el circuito formado por el tramo exterior de la línea y una curva de cierre comprendida en el material magnético no sería nula, lo que contradice el teorema de Ampère.

## 18. Circuitos magnéticos

En esta sección se va a mostrar la similitud que existe entre las distribuciones de la inducción magnética en un problema magnetostático y la del vector densidad de corriente  $\mathbf{J}$  en un problema de conducción estático.

Se parte de un problema magnetostático típico, en el que existen  $n$  circuitos  $C_i$  recorridos por  $n$  corrientes de conducción  $I_i$ , y se desea encontrar la distribución de la inducción magnética  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  creada en todo el espacio. Se define un problema de conducción asociado al anterior, sustituyendo los  $n$  circuitos por sendas fuentes de tensión  $V_i = kI_i$  entre las dos caras, separadas infinitesimalmente, de  $n$  superficies que se apoyen sobre los circuitos anteriores. Se sustituyen los materiales magnéticos por conductores cuya conductividad  $\sigma$  es  $\sigma = k\mu$ , y la incógnita pasa a ser  $\mathbf{J}$ . Se va a demostrar, que las soluciones de ambos problemas son equivalentes.

En efecto, la primera ley de Kirchhoff para la electrotecnia dice que para cualquier superficie cerrada  $\Sigma$

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (41)$$

y la segunda, que para cualquier circuito cerrado  $C$

$$\oint_C \rho\mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\ell} = fem_C \quad (42)$$

En magnetostática, evidentemente se verifican las anteriores relaciones, cambiando  $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $fem \rightarrow fmm = \sum N_i I_i$ ,  $\sigma \rightarrow \mu$

Por lo tanto, la distribución de la inducción y del flujo magnéticos son equivalentes al de la distribución de intensidades eléctricas en un problema electrotécnico; así como la conducción eléctrica se realiza a través de los conductores, ya que el aire tiene una conductividad muy baja, el flujo magnético discurre en los materiales magnéticos, los cuales se disponen en forma de circuito (grueso), si bien la tremenda diferencia en conductividad entre aire y conductor no es igualada por las diferencias de permeabilidad magnética entre aire y hierro. En los circuitos magnéticos que forman parte de sistemas electromecánicos, existen partes móviles y fijas, entre las que existe un pequeño espacio de aire, llamado

entrehierro. La forma del campo en el entrehierro puede aproximarse suponiendo que el campo magnético es perpendicular al hierro y tiende a cerrarse por el camino que menos aire tenga. En cualquier caso, siempre existe un flujo de fugas que no se cierra siguiendo el circuito y que es tanto mayor cuanto mayor sea el entrehierro y menor sea la superficie de hierro. En una primera aproximación, suele despreciarse. Dentro del hierro, cada camino tiene aproximadamente la misma longitud y por lo tanto  $\mathbf{B}$  es prácticamente uniforme en toda la sección; como su flujo es conservativo, entonces, para cada sección de una rama del circuito magnético

$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2$$

retomando la ley de Ampère

$$\oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \sum_i N_i I_i \quad (43)$$

$$\sum_k \Phi_k \int \frac{1}{S_k \mu_k} d\ell = \sum_i N_i I_i = \text{fmm}_C \quad (44)$$

se llega a la segunda ley de Kirchhoff para la magnetostática

$$\sum_k \mathcal{R}_{\parallel} \Phi_k = \text{fmm}_C \quad (45)$$

La reluctancia de una rama de sección constante es

$$\mathcal{R} = \frac{L}{\mu S}$$

y en ella se verifica la ley de Ohm para la magnetostática

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{\mathcal{R}} \quad (46)$$

En la figura 18 se representa un circuito magnético de sección rectangular constante ( $b \times c$ ) excitado por una corriente  $I$  que circula por un arrollamiento de  $N$  vueltas en torno al núcleo de hierro, de permeabilidad relativa  $\mu_r = 1000$ . El circuito queda interrumpido por un entrehierro de espesor  $e$ . Se procede a calcular el flujo magnético que atraviesa el circuito y el valor de la inducción en el entrehierro.

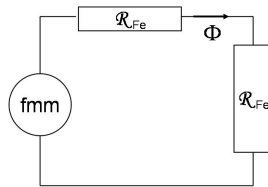
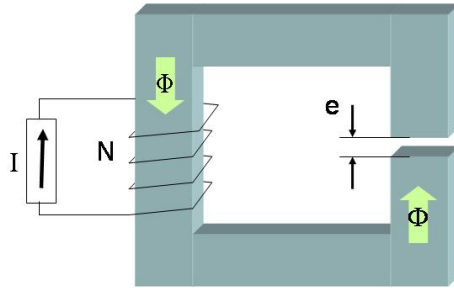
El circuito equivalente es el de la figura 18

La reluctancia del hierro es

$$\mathcal{R}_{Fe} = \frac{L}{\mu_r \mu_0 b c}$$

donde  $L$  es la longitud de la línea media de la sección. La reluctancia de entrehierro es

$$\mathcal{R}_e = \frac{e}{\mu_0 b c}$$



con lo que la suma de ambas queda

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu_0 bc} \left\{ \frac{L + \mu_r e}{\mu_r} \right\}$$

y el flujo magnético del circuito es

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

El campo en el entrehierro puede aproximarse por

$$B = \frac{\Phi}{bc}$$

## 19. Ferromagnéticos duros

El estudio riguroso de la interacción mutua entre los espines de los electrones que se encuentran en orbitales incompletos y entre ellos y un campo magnético aplicado exteriormente debe realizarse desde el marco de la Mecánica Cuántica, lo cual que sobrepasa las coordenadas de este curso. Sin embargo es posible exponer los rasgos más importantes que describen el comportamiento macroscópico de este tipo de sistemas.

En efecto, casi todos los elementos de los grupos de transición y algunas tierras raras presentan orbitales de tipo  $d$  incompletos, con un único electrón el cual, al no compartir el orbital con otro electrón de espín opuesto, puede orientar libremente su momento magnético.

La Física Cuántica proporciona un potencial de interacción

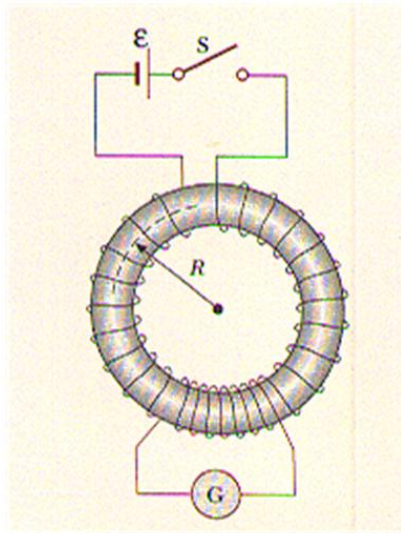
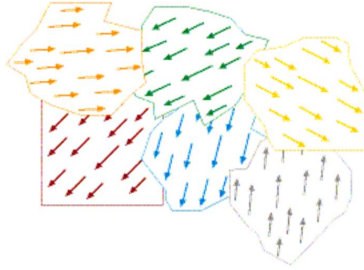
$$U_S = -2I \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$$

donde  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  representan los momentos magnéticos de espín que interaccionan e  $I$  es la integral de acción, que es muy fuerte en la vecindad atómica, aunque disminuye fuertemente con la distancia. (Nótese, de paso, que la dependencia de  $I$  con la distancia es responsable de los fenómenos de magnetoestricción, tan utilizados en la conversión electromecánica de ondas acústicas y ultrasónicas).

Existe una fuerte interacción entre los espines que tiende a alinearlos en la misma dirección y sentido, cuyo radio de acción no es mayor que unos tres átomos, aunque su intensidad es mucho más elevada que la que resulta de consideraciones clásicas.

Como consecuencia de esta interacción, los átomos se organizan en zonas o *dominios* magnéticos ( o de *Weiss*, en honor al físico francés que los descubrió) en los que los espines de los electrones desapareados son paralelos. Estas zonas, de entre 0,1 y 1 mm de longitud limitan unas con otras mediante las *paredes de Weiss*. En ausencia de un campo magnetizante exterior, los momentos magnéticos de las zonas del material se encuentran distribuidos aleatoriamente y el material no se encuentra magnetizado macroscópicamente.



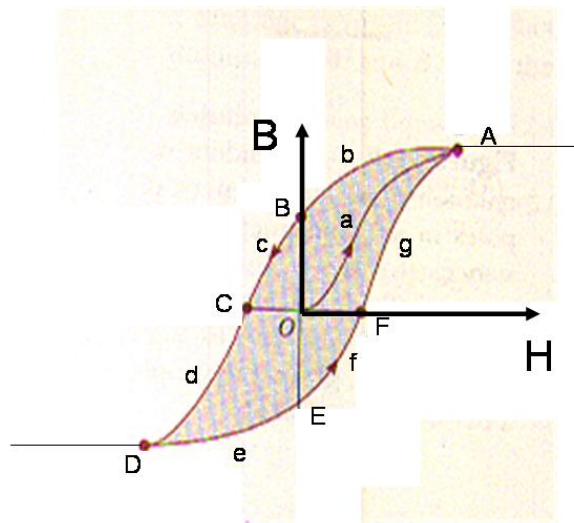


Cuando se aplica un campo magnetizante exterior, las zonas límite entre dos, tienden a magnetizarse según la zona vecina más alineada con el campo, de modo que el momento magnético total se alinea con el campo. Si entonces se deja de aplicar el campo exterior, el material queda magnetizado; por lo tanto en estos materiales existe una magnetización que depende del devenir anterior de dicho material. Este fenómeno recibe el nombre de *histéresis* (memoria) y es lo que caracteriza los materiales *ferromagnéticos*.

Si se utiliza un dispositivo como el que se muestra en la figura 19, se tiene que

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\varphi \approx \frac{NI}{2\pi R} \mathbf{u}_\varphi = H \mathbf{u}_\varphi$$

y la inducción  $\mathbf{B} = B(H) \mathbf{u}_\varphi$  (sustancias isótropas) será dependiente del material. Si el material se magnetiza fuertemente, la inducción será fundamentalmente la que cree la magnetización de los dominios magnéticos, en caso contrario, sería

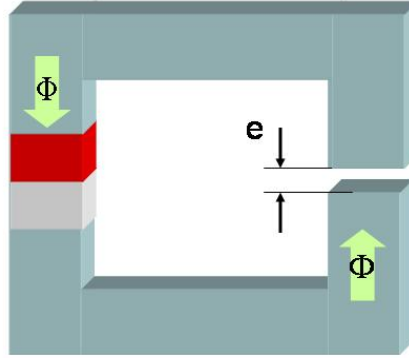


$$B = \mu_0 H.$$

Si se parte de un material desmagnetizado y se le va aplicando una corriente cada vez mayor, la inducción  $B$  crece según la curva  $A$ , hasta llegar a saturarse (punto  $A$ ), momento en el que todo el material es un dominio magnético orientado según el campo; el valor de  $B_s$  recibe el nombre de *inducción de saturación*. Si ahora se comienza a reducir la intensidad, entonces  $B$  puede decrecer o mantenerse prácticamente constante, dependiendo del material; en cualquier caso, si se reduce la corriente (tramo  $b$ ), cuando llega a anularse,  $B$  no lo hace, pues queda una magnetización *remanente* en el material con un valor de la inducción denominado *inducción remanente* ( $B_r$ ). Será necesario aplicar una corriente en sentido inverso (tramo  $c$ ) para que el campo de inducción se anule (punto  $C$ ). El valor de  $H$  en este punto recibe el nombre de *campo coercitivo* ( $H_c$ ). A partir de él, si se sigue aplicando una intensidad más negativa (tramo  $d$ ), la inducción se hace negativa, hasta llegar a la saturación (punto  $D$ ). Si se reduce ahora la intensidad (haciéndola más positiva), cuando se anula (punto  $E$ ), el material sigue magnetizado y para desmagnetizarlo (tramo  $f$ ) hay que aplicarle un campo coercitivo positivo (punto  $F$ ). Si se aumenta la intensidad, la magnetización del material cambiará y crecerá (tramo  $g$ ) hasta llegar a la saturación (punto  $A$ ).

La curva representada se denomina *curva de imanación o de histéresis* del material. En ferromagnéticos blandos, la curva de histéresis es muy estrecha y muy estilizada hasta llegar a la saturación. En los ferromagnéticos duros la curva de histéresis tiene un área considerable y, como se verá más adelante, pueden utilizarse como imanes permanentes.

La aplicación más elemental de un imán es aquella en la que éste se utiliza



para generar una inducción magnética en un entrehierro, según la figura 19  
 La aplicación de la ley de Ohm al hierro más el entrehierro implica que

$$\Phi = \frac{fmm_2}{\mathcal{R}} = -\frac{fmm_I}{\mathcal{R}}$$

$$B = \frac{fmm_2}{\mathcal{R}} = -\frac{H_I \ell_I}{\mathcal{R}S} = -\mu_0 H_I \frac{\ell_I}{e}$$

ecuación de una recta (recta de carga) que junto a la curva de histéresis (figura 19) proporciona dos puntos solución. Obviamente, el estado del imán antes de su aplicación determina el punto considerado.

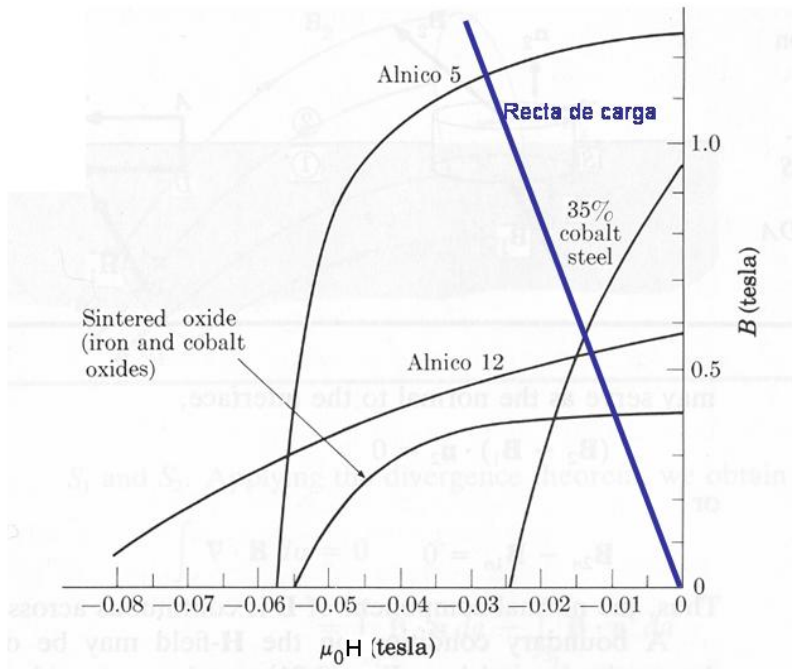
Puede decirse que el imán, cuando no existe otra fuente de campo, actuará en la zona desmagnetizante de su curva de histéresis.

Muchas veces se sustituye este tramo de la curva por una recta, que pasa por los puntos  $(-H_c, 0)$ ;  $(0, B_r)$ , de modo que se tiene un circuito Thèvenin equivalente formado por una fuente de intensidad (flujo) de valor  $B_r S$  y una reluctancia en paralelo de valor  $\mathcal{R}_I = \frac{H_c \ell_I}{B_r S}$ , o bien un Norton de fuente de  $fmm$  de valor  $H_I \ell_I$  y reluctancia en serie  $\mathcal{R}_I$ .

Una temperatura alta puede impedir que los espines se alineen según el orden que impone el potencial de acción. En efecto, las características ferromagnéticas no aparecen por encima de una temperatura llamada *Temperatura de Curie*.

## 20. Energía

Sin prejuzgar el carácter conservativo de la energía necesaria para establecer un campo magnético en presencia de materiales magnéticos, vamos a obtener



una expresión para la energía gastada en un proceso de generación de un campo magnético mediante un sistema de corrientes de conducción en presencia de materiales magnéticos. Si se denomina  $P$  a la derivada temporal de esta energía, se tiene

$$P = - \iiint_{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv = - \iiint_{\infty} (\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})) dv \quad (47)$$

o bien

$$P = \iiint_{\infty} (\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})) dv \quad (48)$$

$$P = \oint_{\infty} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \iiint_{\infty} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv \quad (49)$$

El primer término del segundo miembro es nulo, pues en campos de variación lenta, tanto la inducción magnética como la intensidad eléctrica, lejos de las fuentes, decrecen según una potencia mayor que dos. Queda, por tanto,

$$P = \iiint_{\infty} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv \quad (50)$$

que puede representar una potencia por unidad de volumen

$$p = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (51)$$

y el trabajo invertido por unidad de volumen en un proceso  $\mathcal{P}$  que comience con un campo  $\mathbf{B}_0$  y termine en un campo  $\mathbf{B}_1$

$$W_{\mathcal{P}} = \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (52)$$

Si nos ceñimos a sistemas isótropos, en los que las direcciones de  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{B}$  coinciden, entonces puede representarse la integral anterior por

$$W_{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{P}} H \cdot dB \quad (53)$$

Esta integral representa un campo conservativo cuando sólo depende de los puntos de partida y de llegada, no del camino o proceso  $\mathcal{P}$ . Esto sucede cuando  $B$  es una función única de  $H$ , lo que sucede en los paramagnéticos, diamagnéticos y prácticamente también en los ferromagnéticos blandos, pero no en los ferromagnéticos duros, en los que  $B$  depende de  $H$  y de la historia anterior del material, pudiendo tomar valores dentro del intervalo marcado por el ciclo máximo de histéresis para dicho valor de  $H$ .

Cuando se recorre el ciclo de histéresis máximo, queda, obviamente, una energía neta por unidad de volumen

$$W_c = \oint_C H dB \quad (54)$$

que se ha disipado.

Por lo tanto, los materiales ferromagnéticos actúan como disipadores de energía y al crear un campo magnético mediante un sistema de corrientes, se gasta una energía que no es almacenada y recuperable en el proceso inverso.

## 21. Acciones mecánicas

En un material magnético existe una gran cantidad de circuitos elementales (orbitales y de espín), los cuales, junto con los que albergan a las corrientes de conducción, interaccionan mecánicamente (a través de fuerzas) con la inducción magnética presente.

En sistemas que tienen una energía magnética definida  $U(\underline{\Phi}, \underline{q})$ , puede utilizarse el balance

$$-dU = -\underline{I}^t d\underline{\Phi} + \underline{Q}^t d\underline{q} \quad (55)$$

de donde

$$Q_j = -\frac{\partial U(\underline{\Phi}, \underline{q})}{\partial q_j} \quad (56)$$

que, en sistemas con una relación lineal entre  $\underline{I}$  y  $\underline{\Phi}$  puede representarse también en función del potencial expresado mediante las corrientes  $U(\underline{I}, \underline{q})$ , mediante la expresión

$$Q_j = \frac{\partial U(\underline{I}, \underline{q})}{\partial q_j} \quad (57)$$

Cuando existen ferromagnéticos duros no conocemos la expresión de la energía almacenada en el campo magnético, pues la energía gastada en su proceso de creación tiene una parte que no se almacena para ser recuperada. Sin embargo, siempre que se recorre un tramo  $\mathcal{P}$  de una curva de histéresis, la energía proporcionada al o por el material debe ser la misma. Cuando se tiene un circuito con ferromagnéticos, por lo tanto,

$$-d \left\{ \iiint_{\infty} \int_{\mathcal{P}} H dB dv \right\} = -\underline{I}^t d\Phi + \underline{Q}^t dq \quad (58)$$

de donde

$$Q_j = - \frac{\partial \iiint_{\infty} \left\{ \int_{\mathcal{P}} H(\underline{B}, \underline{q}) dB \right\} dv}{\partial q_j} \quad (59)$$

o bien, suponiendo que se tiene un material ferromagnético de sección  $S$  y longitud  $\ell$ , en el que los campos se distribuyen uniformemente en cada sección

$$\Phi = BS \quad fmm = H\ell$$

$$Q_j = - \frac{\partial U_{\text{resto}} + \int_{\mathcal{P}} fmm(\Phi, \underline{q}) d\Phi}{\partial q_j}$$

En tramos del tipo

$$fmm = \Theta + \mathcal{R}_m \Phi$$

queda

$$Q_j = - \frac{\partial \Theta \Phi + \frac{1}{2} \mathcal{R}_m(q) \Phi^2 + \frac{1}{2} \mathcal{R}_r(q) \Phi^2}{\partial q_j} = - \frac{1}{2} \Phi^2 \frac{\partial \mathcal{R}_r}{\partial q}$$

donde se supone que el resto del espacio define una reluctancia  $\mathcal{R}_r(q)$ .