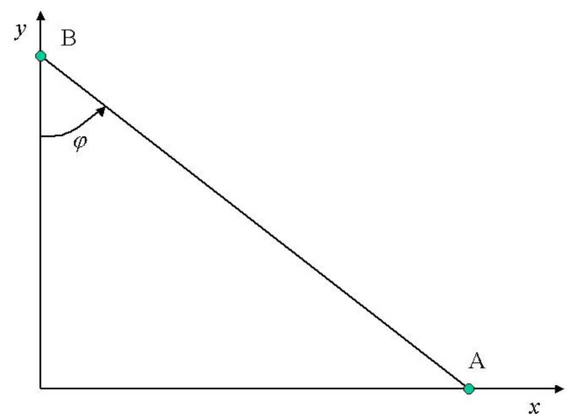
# Circuito variable

## Ampliación de Física II




Un par de buenos conductores rectilíneos se encuentran situados sobre los ejes horizontales $x, y$ de un sistema de referencia cartesiano. Un tercer conductor, de resistencia $R$ es un segmento $AB$ de masa $m$ y longitud $2a$ cuyos extremos pueden deslizar sin rozamiento por los ejes $x$ (el extremos A) e $y$ (el extremo B). El sistema evoluciona en el seno de un campo $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$ de inducción magnética constante y uniforme. El punto $A$ está unido al origen $O$ por un resorte de constante $k$ y longitud natural nula. El segmento $AB$ se posiciona por el ángulo $\varphi = O\hat{B}A$; además, $Q$ es la carga que ha atravesado un punto cualquiera del circuito desde el instante inicial, en el sentido de circulación antihorario (congruente con $\boldsymbol{k}$). En lo que sigue, se despreciará el campo de inducción creado por la corriente que circule por el circuito $OAB$

- Determine el flujo que atraviesa el circuito $OAB$

Respuesta:

El área del circuito triangular es

$$S = 2a^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi$$

de modo que el flujo es

$$\Phi = Ba^2 \operatorname{sen} 2\varphi$$

- Obtenga la fuerza electromotriz inducida en el circuito

  Respuesta:

  Al aplicar la ley de Faraday-Henry, se tiene

  $$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -2B^2a^2 \cos 2\varphi\dot{\varphi}$$

- Escriba la expresión de la intensidad en función de la posición y la velocidad del sistema

  Respuesta:

  La ley de Kirchhoff queda

  $$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = -2B^2a^2 \cos 2\varphi\dot{\varphi} \tag{1}$$

  que, despreciando $L$, queda

  $$RI = -2B^2a^2 \cos 2\varphi\dot{\varphi} \tag{2}$$

- Determine la fuerza generalizada según la coordenada $\varphi$ que el campo magnético realiza sobre el segmento AB

  Respuesta:

  Dado que la energía magnética es

  $$E_m = \frac{1}{2}LI^2 + \Phi I$$

  la fuerza generalizada queda

  $$Q_\varphi = \left.\frac{\partial E_m}{\partial\varphi}\right|_{I\ \text{cte}} = \frac{1}{2}I^2\frac{\partial L}{\partial\varphi} + I\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

  que, despreciando $L$, queda

  $$Q_\varphi = -\frac{4B^2a^4\cos^2 2\varphi}{R}\dot{\varphi}$$

  que también podía haberse obtenido a partir de la expresión

  $$Q_\varphi = -\frac{1}{R}(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi})^2\dot{\varphi}$$

- Obtenga, a partir de consideraciones mecánicas, una ecuación que, junto con (2), determine la evolución de $\varphi, I$

  RESPUESTA:

  La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\varphi}^2$$

  La fuerza generalizada debida al resorte es

$$Q_k = -kx\boldsymbol{i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_A}{\partial \varphi}$$

$$Q_k = -2ka^2 \operatorname{sen} 2\varphi$$

  con lo que

$$\frac{4}{3} m a^2 \ddot{\varphi} = -\frac{4B^2 a^4 \cos^2 2\varphi}{R} \dot{\varphi} - 2ka^2 \operatorname{sen} 2\varphi \tag{3}$$

- Escriba la expresión de las funciones de Lagrange y de Rayleigh electromecánicas y las ecuaciones de Maxwell-Lagrange.

  RESPUESTA:

  Es inmediato que

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = \frac{3}{2} m a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} L(\varphi) \dot{Q}^2 + \Phi(\varphi) \dot{Q} - 2ka^2 \overset{2}{\operatorname{sen}}\, \phi$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} R \dot{Q}^2$$

  de donde, tras despreciar $L$, se obtienen automáticamente las ecuaciones (2),(3), al aplicar las ecuaciones de Maxwell-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial \dot{q}_j}\right)}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}$$

  de forma que con este método se obtienen sistemáticamente las ecuaciones que rigen la evolución de las variables eléctricas (intensidad) y mecánicas (posición).