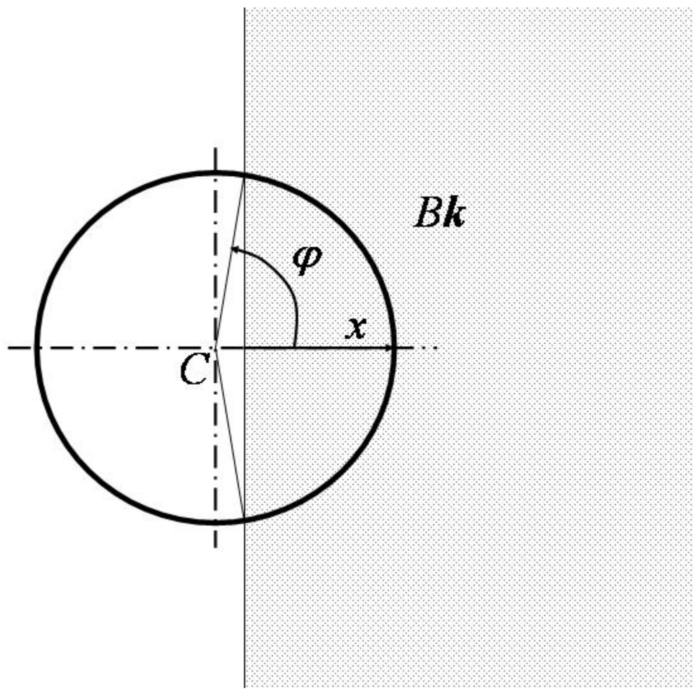
Espira circular que entra en semiplano magnetizado

Ampliación de Física II



Una espira circular de masa m, radio a y resistencia R se encuentra en el semiplano $x < 0$ transladándose con una velocidad $v_0\boldsymbol{i}$ y manteniendo su centro en el eje x. Se orientará el circuito que define la espira en sentido antihorario desde el eje z. En el semiplano $x > 0$ existe una inducción magnética prácticamente uniforme y constante, de valor $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$. Se denominará x a la mayor abscisa de los puntos de la espira y 2φ al ángulo central del arco de espira que se encuentra en el semiplano $x > 0$. Se desprecia la autoinducción de la espira. Determine:

- El flujo magnético que atraviesa la espira en función de φ

Respuesta:

El área del círculo que entra en $x > 0$ es

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}a^2(2\varphi)}_{\text{sector circular}} - \underbrace{2\frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}_{\text{triángulo}} = a^2\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right)$$

por lo que el flujo resulta

$$\Phi(\varphi) = Ba^2\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right)$$

- La fuerza electromotriz definida sobre la espira.

Respuesta:

Aplicando la ley de Faraday-Maxwell

$$fem = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Ba^2\dot{\varphi}(1-\cos 2\varphi) = -2Ba^2 \overset{2}{\operatorname{sen}}\varphi\dot{\varphi}$$

- La intensidad que recorre la espira.

Respuesta:

Al aplicar la ley de Ohm, se tiene

$$I = -\frac{2Ba^2\operatorname{sen}^2\varphi}{R}\dot{\varphi}$$

- La fuerza según el eje x que se ejerce sobre la espira por parte del campo magnético

Respuesta:

En primer lugar obtendremos Q_φ y luego la relacionaremos con F_x, ya que

$$Q_\varphi = F_x\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

$$Q_\varphi = I\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{1}{R}\left(2Ba^2\overset{2}{\operatorname{sen}}\varphi\right)^2\dot{\varphi}$$

con lo que, teniendo en cuenta que

$$x = a(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \varphi} = a \operatorname{sen}\varphi$$

se tiene

$$F_x = -\frac{1}{R} 4B^2 a^3 \operatorname{sen}^3 \varphi \dot{\varphi}$$

- La fuerza F_x en función de $x, \dot{x}$.

  RESPUESTA:

  Mediante la relación

$$x = a(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \dot{x}\varphi = a \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi}$$

  y

$$\cos\varphi = 1 - \frac{x}{a} \Rightarrow \cos^2\varphi = 1 - 2\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\varphi = 2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}$$

  se tiene

$$F_x = -\frac{1}{R} 4B^2 (2ax - x^2)\dot{x}$$

- La ecuación que determina la evolución de x.

  RESPUESTA:

  Aplicando la segunda ley de Newton, se escribe

$$m\ddot{x} = -\frac{4B^2}{R}(2ax\dot{x} - x^2\dot{x})$$

- La evolución $\dot{x}(t)$ de la velocidad.

  RESPUESTA:

  Integrando

$$\dot{x} = v_0 - \frac{4B^2}{R}(ax^2 - \frac{x^3}{3}) = v_0 - \frac{4B^2}{R} x^2 (a - \frac{x}{3})$$

- La relación entre la velocidad inicial y la x_M máxima de penetración.

  RESPUESTA:

  Haciendo $\dot{x} = 0$

$$v_0 = \frac{4B^2}{R} x_M^2 (a - \frac{x_M}{3})$$

lo que sólo tiene lugar si

$$v_0 \leq \frac{8B^2}{3R}a^3$$

- Potencias mecánica de la fuerza que el campo ejerce sobre la espira y eléctrica disipada por efecto Joule en la misma.

$$P_m = F_x\dot{x} = -\frac{1}{R}4B^2(2ax - x^2)(\dot{x})^2$$

y sustituyendo en función de φ

$$P_m = -\frac{1}{R}(2Ba^2 \operatorname{sen}^2\varphi\dot{\varphi})^2$$

$$P_e = femI = \frac{1}{R}(2Ba^2 \operatorname{sen}^2\varphi\dot{\varphi})^2$$

lo que indica que la energía mecánica perdida por el freno del campo se disipa en la resistencia.