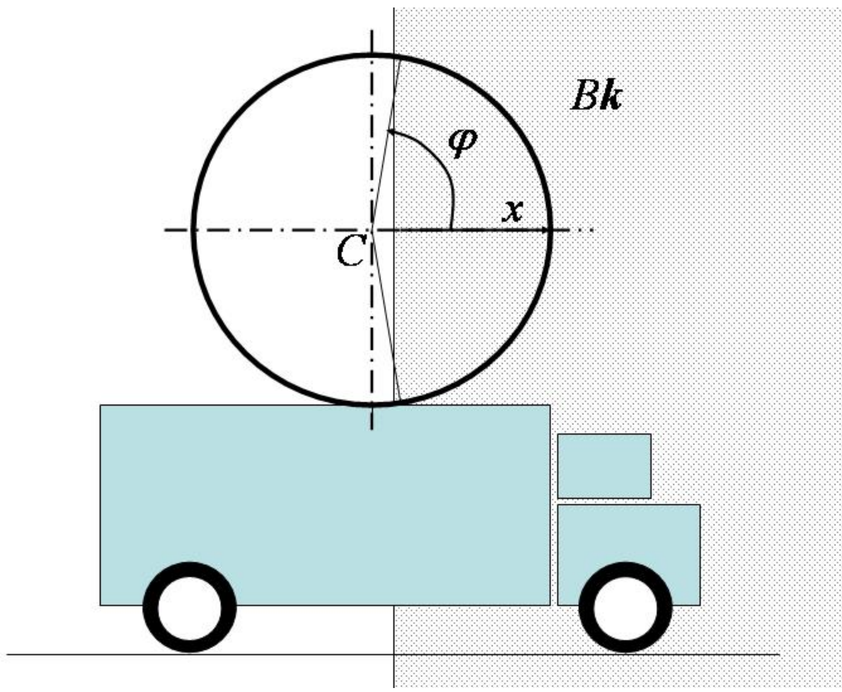
Espira circular que entra en semiplano magnetizado sobre un vehículo

Ampliación de Física II



Un vehículo circula a una velocidad constante $v\boldsymbol{i}$ y porta una espira circular de masa m, radio a y resistencia R que inicialmente se encuentra en el semiplano $x < 0$ manteniendo su centro en el eje x. Se orientará el circuito que define la espira en sentido antihorario desde el eje z. En el semiplano $x > 0$ existe una inducción magnética prácticamente uniforme y constante, de valor $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$. Se denominará x a la mayor abscisa de los puntos de la espira ($x_0 = 0$) y 2φ al ángulo central del arco de espira que se encuentra en el semiplano $x > 0$ ($\varphi_0 = 0$). Se desprecia la autoinducción de la espira. Determine:

- El flujo magnético que atraviesa la espira en función de φ

RESPUESTA:

El área del círculo que entra en $x > 0$ es

$$S = \underbrace{\frac{1}{2}a^2(2\varphi)}_{\text{sector circular}} - \underbrace{2\frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}_{\text{triángulo}} = a^2\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right)$$

por lo que el flujo resulta

$$\Phi(\varphi) = Ba^2\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right)$$

- La fuerza electromotriz definida sobre la espira en función del tiempo.

RESPUESTA:

Aplicando la ley de Faraday-Maxwell

$$fem = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Ba^2\dot{\varphi}(1-\cos 2\varphi) = -2Ba^2\operatorname{sen}^2\varphi\dot{\varphi}$$

y como

$$x = a(1-\cos\varphi) \Rightarrow \dot{x} = a\operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi}$$

entonces

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{vt}{a}\right)$$

y

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{a\operatorname{sen}\varphi}$$

con lo que

$$fem = -2Bva\sqrt{\left(2-\frac{vt}{a}\right)\frac{vt}{a}}$$

- La intensidad que recorre la espira.

RESPUESTA:

Al aplicar la ley de Ohm, se tiene

$$I = -\frac{2Bva}{R}\sqrt{\left(2-\frac{vt}{a}\right)\frac{vt}{a}}$$

- La fuerza según el eje x que se ejerce sobre la espira por parte del campo magnético, en función del tiempo.

RESPUESTA:

En primer lugar obtendremos Q_φ y luego la relacionaremos con F_x, ya que

$$Q_\varphi = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

$$Q_\varphi = I \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{R} \left(2Ba^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \right)^2 \dot{\varphi}$$

con lo que,

$$F_x = -\frac{1}{R} 4B^2 a^3 \operatorname{sen}^3 \varphi \dot{\varphi}$$

Mediante la relación

$$x = a(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \dot{x}\varphi = a \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi}$$

y

$$\cos\varphi = 1 - \frac{x}{a} \Rightarrow \cos^2\varphi = 1 - 2\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\varphi = 2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}$$

se tiene

$$F_x = -\frac{1}{R} 4B^2 (2ax - x^2)\dot{x}$$

$$F_x = -\frac{1}{R} 4B^2 v^2 t(2a - vt)$$

- La potencia suministrada por el vehículo a la espira mientras ésta entra en el campo, en función de t.

RESPUESTA:

$$P_v = -F_x v = \frac{1}{R} 4B^2 v^3 t(2a - vt)$$

- La potencia disipada en la resistencia, en función de t.

RESPUESTA:

$$P_e = I^2 R = \frac{4B^2 v^3 t}{R} (2a - vt) \frac{vt}{a}$$

que coincide con la anterior, lo que significa que la potencia de tracción del vehículo se disipa en la resistencia.

- La energía que aporta el vehículo para penetrar totalmente en el campo magnético.

RESPUESTA:

El tiempo que tarda es $T = \frac{2a}{v}$, con lo que

$$W = \int_0^T \frac{1}{R} 4B^2 v^3 t(2a - vt)\mathrm{d}t = \frac{1}{R} 4B^2 v^3 (aT^2 - \frac{1}{3} vT^3)$$

$$W = \frac{1}{R} 4B^2 v^3 (4a^3 \frac{1}{v^2} - 8a^3 \frac{1}{3v^2})$$

$$W = \frac{16}{3R} B^2 v a^3$$

que coincide, obviamente, con el calor disipado en la resistencia de la espira.