Una onda plana linealmente polarizada

Ampliación de Física II

Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío y viene descrita por su intensidad eléctrica

$$\boldsymbol{E}(x,y,t) = E_0 \text{exp}\left(-(\alpha x + \beta y + \gamma t)^2\right)\boldsymbol{k}$$

donde $E_0, \alpha, \beta, \gamma$ son constantes. Determine

1.- La dirección de los planos en los que el campo es uniforme en cada instante.

2.- La dirección de la velocidad de propagación de la onda.

3.- El vector que describe la velocidad de propagación, en función de α, β, γ.

4.- Sabiendo que la velocidad de propagación es c, determine la relación que deben satisfacer α, β, γ.

5.- La intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}(x,y,t)$

6.- El vector de Poynting.

7.- El valor medio del vector de Poynting para cada punto $< \boldsymbol{P} > (x,y)$.

Respuesta:

1.- La dirección de los planos en los que el campo es uniforme en cada instante se obtiene haciendo constante el argumento de la exponencial y por tanto

$$\alpha x + \beta y = K$$

lo que representa una familia de planos perpendiculares al vector $\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$

2.- La dirección de la velocidad de propagación de la onda es, por lo tanto, la de $\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$, lo que permite escribir

$$\boldsymbol{c} = \lambda\left(\alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}\right)$$

3.- El vector que describe la velocidad de propagación se obtiene haciendo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda\alpha t \\ y & = & \lambda\beta t \end{array} \right.$$

y sustituyendo en el argumento de la exponencial. Haciendo que éste sea constante, se tiene

$$\lambda\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\gamma=0$$

por lo que

$$\boldsymbol{c}=-\gamma\frac{\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}}{\alpha^2+\beta^2}$$

4.- Sabiendo que la velocidad de propagación es c, se tiene

$$c=\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

5.- La intensidad del campo magnético $\boldsymbol{H}(x,y,t)$ viene dada por

$$\boldsymbol{H}=\epsilon_0\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{E}=-\epsilon_0 c\frac{\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\times\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{H}=\epsilon_0 c E_0\frac{\alpha\boldsymbol{j}-\beta\boldsymbol{i}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\exp\left(-\left(\alpha x+\beta y+\gamma t\right)^2\right)$$

6.- El vector de Poynting en una onda plana es

$$\boldsymbol{P}=\epsilon_0 E^2\boldsymbol{c}$$

por lo que

$$\boldsymbol{P}=-\epsilon_0 c E_0^2\frac{\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\exp\left(-2\left(\alpha x+\beta y+\gamma t\right)^2\right)$$

7.- El valor medio del vector de Poynting para cada punto $<\boldsymbol{P}>(x,y)$ es, obviamente, nulo.