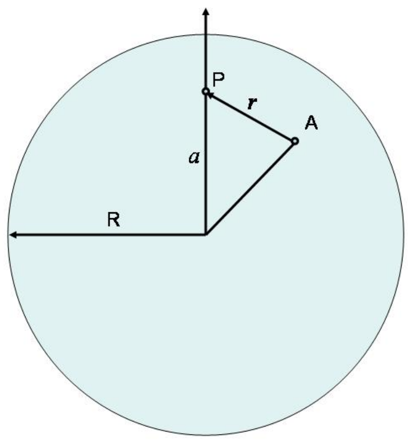
Integral de Prankl

Dada su frecuente aparición en problemas y como parte de algunas demostraciones teóricas, se procede a calcular la integral

$$\boldsymbol{J}(P) = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{1}{r}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

extendida sobre una superficie esférica de radio R, centrada en el origen y con su elemento de área orientado hacia el exterior.



En primer lugar, se elije el eje z tal que $\boldsymbol{OP} = a\boldsymbol{k}, a \geq 0$ de modo que, por simetría $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{k}$ donde

$$I = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}}\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$I = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$I = 2\pi R^2 I'$$

donde

$$I' = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

Para calcular I' se procede a una integración por partes

$$u = \cos\theta \Rightarrow \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}} \Rightarrow v = \frac{1}{aR}\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}$$

con lo que

$$I' = \left(\frac{1}{aR}\cos\theta\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta} \right)_0^{\pi} + \frac{1}{aR}\int_0^{\pi} \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}\operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta$$

$$I' = \left(\frac{1}{aR}\cos\theta\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}\right)_0^\pi + \frac{1}{aR}\int_0^\pi \sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \mathrm{d}\theta$$

$$I' = -\frac{1}{aR}\left(|R+a|-|R-a|\right) + \frac{1}{3a^2R^2}\left(\sqrt{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^3}\right)_0^\pi$$

$$I' = -\frac{1}{aR}\left(|R+a|-|R-a|\right) + \frac{1}{3a^2R^2}\left(|R+a|^3-|R-a|^3\right)$$

Para proseguir se distinguen dos casos

1.- $a \leq R$ En este caso $|R-a| = R-a$ con lo que

$$I' = -2\frac{1}{R} + \frac{1}{3a^2R^2}\left(a^3+3a^2R+3R^2a+R^3-(R^3-3R^2a+3Ra^2-a^3)\right)$$

$$I' = \frac{2a}{3R^2}$$

y

$$\boldsymbol{J} = \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{OP}$$

2.- $a > R$ En este caso $|R-a| = a-R$ con lo que

$$I' = -2\frac{1}{R} + \frac{1}{3a^2R^2}\left(a^3+3a^2R+3R^2a+R^3+(R^3-3R^2a+3Ra^2-a^3)\right)$$

$$I' = \frac{2R}{3a^2}$$

y

$$\boldsymbol{J} = \frac{4\pi R^3}{3|\boldsymbol{OP}|^3}\boldsymbol{OP} = \frac{V}{|\boldsymbol{OP}|^3}\boldsymbol{OP}$$