1. Simetrías de la distribución de corrientes

La existenca de simetrías en problemas de cálculo de los campos de la inducción magnética o del potencial vector permite, en muchos casos, determinar algunas de sus características sin necesidad de más consideraciones. En algunos casos, además, estas caracterçisticas hacen que la aplicación del teorema de Ampere conduzca rápida y sencillamente a la solución. El carácter seudovectorial del campo de inducción magnética aconseja recopilar y memorizar los resultados que relacionan las simetrías en los campos magnéticos y en las corrientes. En un escueto estilo matemático, son los siguientes:

Definición 1. Diremos que dos distribuciones de corriente son simétricas respecto a un plano π cuando las densidades de corriente $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J}'$ en puntos simétricos P, P' respecto a π son vectores que a su vez son simétricos respecto a π. Si π es el plano xy de una referencia cartesiana, esto quiere decir que

$$\boldsymbol{J}_{xy}(x,y,z) = \boldsymbol{J}'_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ J_z x,y,z = -J'_z(x,y,-z) \tag{1}$$

Definición 2. Diremos que dos distribuciones de corriente son antisimétricas respecto a un plano π cuando las densidades de corriente $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J}'$ en puntos simétricos P, P' respecto a π son vectores que a su vez son antisimétricos respecto a π. Si π es el plano xy de una referencia cartesiana, esto quiere decir que

$$\boldsymbol{J}_{xy}(x,y,z) = -\boldsymbol{J}'_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ J_z x,y,z = J'_z(x,y,-z) \tag{2}$$

Teorema 1. Cuando dos distribuciones de corriente $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J}'$ son simétricas respecto a $\pi = xy$, entonces, debido al carácter seudovectorial del campo de inducción magnética $\boldsymbol{B}$, se tiene que $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}'$ son antisimétricos respecto a π, lo que se traduce en que

$$\boldsymbol{B}_{xy}(x,y,z) = -\boldsymbol{B}'_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ B_z(x,y,z) = B'_z(x,y,-z) \tag{3}$$

mientras que el potencial vector, como verdadero campo vectorial verifica

$$\boldsymbol{A}_{xy}(x,y,z) = \boldsymbol{A}'_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ A_z(x,y,z) = -A'_z(x,y,-z) \tag{4}$$

Teorema 2. Cuando dos distribuciones de corriente $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J}'$ son antisimétricas respecto a $\pi = xy$, entonces, debido al carácter seudovectorial del campo de inducción magnética $\boldsymbol{B}$, se tiene que $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}'$ son simétricos respecto a π, lo que se traduce en que

$$\boldsymbol{B}_{xy}(x,y,z) = \boldsymbol{B}'_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ B_z(x,y,z) = -B'_z(x,y,-z) \tag{5}$$

mientras que el potencial vector, como verdadero campo vectorial verifica

$$\boldsymbol{A}_{xy}(x,y,z) = -\boldsymbol{A}'_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ A_z(x,y,z) = A'_z(x,y,-z) \tag{6}$$

Corolario 1. Si una distribución de corrientes es simétrica respecto a xy, es decir,

$$\boldsymbol{J}_{xy}(x,y,z) = \boldsymbol{J}_{xy}(x,y,-z) \ \wedge \ J_z x,y,z = -J_z(x,y,-z)$$

entonces

$$\boldsymbol{B}_{xy}(x,y,z) = -\boldsymbol{B}_{xy}(x,y,-z) \wedge B_z(x,y,z) = B_z(x,y,-z)$$

mientras que el potencial vector verifica

$$\boldsymbol{A}_{xy}(x,y,z) = \boldsymbol{A}_{xy}(x,y,-z) \wedge A_z(x,y,z) = -A_z(x,y,-z)$$

y en el plano de simetría

$$\boldsymbol{B}(x,y,0) = B_z(x,y,0)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,0) = A_x(x,y,0)\boldsymbol{k} + A_y(x,y,0)\boldsymbol{j}$$

Definición 3. Una distribución de corrientes presenta simetría de revolución en torno a un eje z cuando todos los planos que contienen a z son de simetría para las corrientes.

Corolario 2. Si una distribución de corrientes presenta simetría de revolución en torno a un eje z, entonces

$$\boldsymbol{B}(\rho,\varphi,z) = B_\varphi(\rho,z)\boldsymbol{u}_\varphi$$

$$\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z) = A_\rho(\rho,z)\boldsymbol{u}_\rho + A_z(\rho,z)\boldsymbol{u}_z$$

Corolario 3. Si una distribución de corrientes es antisimétrica respecto a xy,es decir,

$$\boldsymbol{J}_{xy}(x,y,z) = -\boldsymbol{J}_{xy}(x,y,-z) \wedge J_z x,y,z = J_z(x,y,-z)$$

entonces

$$\boldsymbol{B}_{xy}(x,y,z) = \boldsymbol{B}_{xy}(x,y,-z) \wedge B_z(x,y,z) = -B_z(x,y,-z)$$

$$\boldsymbol{A}_{xy}(x,y,z) = -\boldsymbol{A}_{xy}(x,y,-z) \wedge A_z(x,y,z) = A_z(x,y,-z)$$

y en el plano de simetría

$$\boldsymbol{B}(x,y,0) = B_x(x,y,0)\boldsymbol{k} + B_y(x,y,0)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,0) = A_z(x,y,0)\boldsymbol{k}$$

Definición 4. Se dice que una distribución de corrientes presenta antisimetría de revolución en torno a un eje z cuando todos los planos que contienen a z son de antisimetría para las corrientes.

Corolario 4. Si una distribución de corrientes presenta antisimetría de revolución en torno a un eje z, entonces

$$\boldsymbol{B}(\rho,\varphi,z) = B_\rho(\rho,z)\boldsymbol{u}_\rho + B_z(\rho,z)\boldsymbol{u}_z$$

$$\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z) = A_\varphi(\rho,z)\boldsymbol{u}_\varphi$$

Definición 5. Se dice que un sistema de corrientes presenta una simetría estratificada respecto a una dirección $\boldsymbol{k}$, cuando su valor es perpandicular a $\boldsymbol{k}$ y es el mismo en todos los puntos de cualquier plano normal a $\boldsymbol{k}$.

Teorema 3. Si una distribución de corrientes tiene simetría estratificada respecto a una dirección, entonces la inducción magnética también la presenta.

En este caso, dado que la distribución de corrientes está definida en planos que son infinitos, no converge la integral para $\boldsymbol{A}$.

2. Aplicaciones

Comprobar que el teorema de Ampere puede aplicarse para calcular $\boldsymbol{B}$ cuando las corrientes presentan:

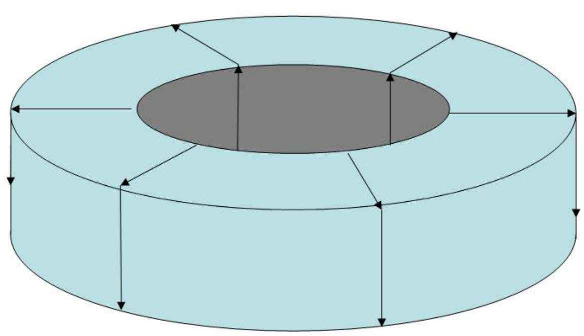
A. Simetría de revolución en torno a z (p.e. toros finitos de revolución de cualquier sección recorridos por corrientes meridionales: $\boldsymbol{B}$ fuera es nulo y dentro es fácil de calcular; corriente rectilínea distribuida en torno al eje z, etc.).

B. Antisimetría de revolución y de translación en torno a z (p.e. solenoides infinitos con corrientes acimutales).

C. Simetría estratificada $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(z)$ (p.e. las capas de corrientes)

Utilizar los resultados anteriores para eliminar componentes de $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ en distribuciones que posean la simetría adecuada.

1.- Un toro τ de eje de revolución z tiene una sección cuadrada de lado $2a$ y un radio de revolución R para el punto medio de dicha sección. Una corriente de intensidad I se distribuye uniformemente sobre la superficie del toro, con el sentido de z en el interior y su opuesto en el exterior, siendo sus límeas las propias secciones cuadradas de τ. Obtenga la distribución de la inducción magnética en todo el espacio.



Solución: Por haber simetría de revolución en torno a z, se puede afirmar que:

A.- La inducción magnética sólo tiene componente acimutal B_φ

B.- La inducción magnética no depende de φ

Al aplicar el teorema de Ampere sobre una circunferencia de eje z y radio ρ, se tiene

$$2\pi\rho B_\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{fuera del toro} \\ \mu_0 I & \text{dentro del toro} \end{array} \right\}$$

y por lo tanto

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{0} & \text{fuera del toro} \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{u}_\varphi & \text{dentro del toro} \end{array} \right\}$$

2.- La superficie de un cilindro infinito de revolución, eje z y radio R, es recorrida por una corriente acimutal uniforme, cuya densidad superficial es $\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma\boldsymbol{u}_\varphi$. Determine la distribución de la inducción magnética en todo el espacio.

Considerando las simetrías del sistema de corrientes, se puede afirmar que:

A.- Por haber simetría respecto a cualquier plano z =cte, sólo existe componente B_z según el eje z que, además, no depende de z.

B.- Por haber antisimetría de revolución en torno a z, la inducción magnética no depende de φ

Al aplicar el teorema de Ampere sobre un rectángulo de dos lados paralelos al eje z, y que no sea atravesado por ninguna corriente, se tiene

$$B_z = B_{z0}$$

Pero cuando $\rho \to \infty$ $B_z \to \infty$, por lo que el campo es nulo fuera del cilindro. Finalmente, al aplicar el teorema de Ampere a un rectángulo que tenga lados paralelos a z dentro y fuera del cilindro, se tiene que, en los puntos interiores

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\Gamma\boldsymbol{u}_z$$

3.- Un cilindro infinito, de revolución en torno al eje z y radio R es recorrido por una intensidad I que se distribuye uniformemente por su interior. Determine la distribución de la inducción magnética en todos los puntos del espacio.

Dado que existe simetría de revolución en torno a z,

A.- la inducción magnética sólo tiene componente acimutal

B.- la inducción no depende de φ

Al aplicar el teorema de Ampere a una circunferencia de eje z y radio ρ, se tiene

$$2\pi\rho B_\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \mu_0 I & \text{fuera del cilindro} \\ \mu_0 I\frac{\rho^2}{R^2} & \text{dentro del cilindro} \end{array} \right\}$$

y por lo tanto

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{u}_\varphi & \text{fuera del cilindro} \\ \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R^2}\boldsymbol{u}_\varphi & \text{dentro del cilindro} \end{array} \right\}$$

4.- Una corriente uniforme $\boldsymbol{\Gamma} = \Gamma \boldsymbol{i}$ recorre el plano $z = 0$ de un sistema cartesiano. Halle el valor de la inducción magnética en un punto cualquiera del espacio.

Dado que cualquier plano y =cte es de simetría para las corrientes, la inducción magnética es normal al mismo, por lo qu $\boldsymbol{B} = B_y \boldsymbol{j}$. Por otra parte, la simetría estratificada hace que $B_y = B_y(z)$, y al aplicar Ampere sobre cualquier rectángulo de lados paralelos a los ejes y, z y que no corte a la corriente, se tiene que la inducción es constante en cada semiespacio. Al hacerlo sobre rectángulos paralelos a los anteriores que corten al plano de corriente, se tiene

$$\boldsymbol{B} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2}\mu_0 \Gamma \boldsymbol{j} & \text{para z} > 0 \\ +\frac{1}{2}\mu_0 \Gamma \boldsymbol{j} & \text{para z} < 0 \end{array} \right\}$$

3. Líneas de campo de la inducción

Cuando la distribución de corriente presente bien simetría o bien antisimetría de revolución en torno a un eje z, entonces puede eludirse la integración de las ecuaciones diferenciales que determinan las líneas de campo.

En efecto, cuando la distribución de corrientes presente simetría de revolución en torno a z, la inducción sólo puede ser acimutal y sus líneas de campo son circunferencias de eje z.

Si la distribución de corrientes presenta antisimetría de revolución en torno a z, entonces el potencial vector debe ser acimutal y no puede depender de φ. Trabajando en esféricas:

$$\boldsymbol{A} = A(r, \theta) \boldsymbol{u}_\varphi$$

con lo que

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_r & r\boldsymbol{u}_\theta & r \operatorname{sen} \theta \boldsymbol{u}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \operatorname{sen} \theta A \end{vmatrix}$$

que es igual a

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(\boldsymbol{u}_r \frac{\partial r \operatorname{sen} \theta A}{\partial \theta} - r\boldsymbol{u}_\theta \frac{\partial r \operatorname{sen} \theta A}{\partial r} \right)$$

y la ecuación de las líneas de campo, que obviamente son coplanarias con el eje z queda

$$\frac{\mathrm{d}r}{\dfrac{\partial r \operatorname{sen} \theta A}{\partial \theta}} = -\frac{r\mathrm{d}\theta}{r\dfrac{\partial r \operatorname{sen} \theta A}{\partial r}}$$

que implica

$$\frac{\partial r \operatorname{sen} \theta A}{\partial \theta} \mathrm{d}\theta + \frac{\partial r \operatorname{sen} \theta A}{\partial r} \mathrm{d}r = 0$$

que conduce a

$$r \operatorname{sen} \theta A(r, \theta) = C$$

Si se trabaja en cilíndricas:

$$\rho A(\rho, z) = C$$

que es la ecuación de la familia de líneas de campo en el semiplano ρ, θ, siendo C el parámetro que distingue unas de otras.Como se puede apreciar, conocida la función $A(r, \theta)$, las líneas de campo se obtienen de forma inmediata.