Rótor de jaula de ardilla

Ampliación de Física II

Una espira cuadrada de lado a puede girar en torno a un eje fijo x_1 que pasa por su centro O el cual es el origen de un sistema de coordenadas cartesianas $Ox_1y_1z_1$ fijo. Sea $\boldsymbol{k}$ un vector unitario normal al plano de la espira, la cual presenta una resistencia R.

En el espacio ocupado por la espira existe una inducción magnética uniforme y variable en el tiempo $\boldsymbol{B} = B\cos\omega t\boldsymbol{j}_1 + B\,\mathrm{sen}\,\omega t\boldsymbol{k}_1$ creada por un par de devanados mutuamente perpendiculares recorridos por sendas corrientes alternas desfasadas $\pi/2$ radianes.

La espira se posiciona mediante el ángulo φ que ha girado $\boldsymbol{k}$ alrededor de $\boldsymbol{i}_1$ desde el instante inicial en el que $\varphi_0 = 0$.

La espira puede mover un sistema mecánico de momento de inercia J y constante de amortiguamiento viscoso b (es decir, existe un par resistente igual a $-b\dot{\varphi}$). Puede despreciar la autoinducción de la espira.

- Obtenga las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución de φ, i

Respuesta:

El flujo es

$$\Phi = a^2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\Phi = a^2B(\cos\varphi\boldsymbol{k}_1 - \mathrm{sen}\,\varphi\boldsymbol{j}_1)\cdot(\cos\omega t\boldsymbol{j}_1 + \mathrm{sen}\,\omega t\boldsymbol{k}_1)$$

$$\Phi = Ba^2\,\mathrm{sen}(\omega t - \varphi) \tag{1}$$

de modo que la fem es

$$\mathcal{E} = -Ba^2(\omega - \dot{\varphi})\cos(\omega t - \varphi)$$

$$\mathcal{E} = Ri$$

y la intensidad es

$$i = -\frac{Ba^2(\omega - \dot{\varphi})\cos(\omega t - \varphi)}{R}$$

El par aplicado es

$$N = i\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -iBa^2\cos(\omega t - \varphi)$$

$$N = \frac{B^2a^4(\omega - \dot{\varphi})\cos^2(\omega t - \varphi)}{R} \tag{2}$$

con lo que la ecuación mecánica es

$$J\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} = \frac{B^2a^4(\omega - \dot{\varphi})\cos^2(\omega t - \varphi)}{R} \tag{3}$$

- Si $\varphi \approx \Omega t$, obtenga el par medio aplicado a la espira

RESPUESTA:

El valor medio de $\cos^2\theta$ es $1/2$, de modo que

$$N_m = \frac{B^2a^4(\omega - \Omega)}{2R} \tag{4}$$

- Esboce la curva par-velocidad en las proximidades de $\Omega = \omega$.

RESPUESTA:

Es una recta de pendiente $-\frac{B^2a^4}{2R}$

- Determine la velocidad de funcionamiento del sistema

RESPUESTA:

La curva de funcionamiento del motor corta a la de resistencia

$$N_m = b\Omega$$

en el punto en que

$$b\Omega = \frac{B^2a^4(\omega - \Omega)}{2R}$$

$$\Omega = \frac{B^2a^4\omega}{2Rb + B^2a^4} \tag{5}$$

NOTA: en los motores de inducción de jaula de ardilla, no sólo existe una espira, sino una gran cantidad de ellas. Esto hace que el efecto promediador que en este problema sólo ha sido temporal, se realice mediante la suma de los pares sobre cada espira; esto multiplica el par medio por el número de espiras, a la vez que alisa la variación del par en un ciclo.