Espira circular con eje fijo en campo uniforme

Ampliación de Física II

Una espira circular de centro O, radio R y masa M puede rotar libremente en torno a uno de sus diámetros, que se adopta como primer eje cartesiano (x) de dos sistemas de referencia con origen en O ; uno de los sistemas es fijo y el otro solidario a la espira y eje z según el eje de ésta. La espira está inmersa en un campo de inducción magnética $\boldsymbol{B}$ uniforme y constante $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}_1$. En el instante inicial, el ángulo de nutación es θ_0 y la espira está en reposo. La intensidad que recorre la espira es constante I y en sentido congruente con $\boldsymbol{k}$

Determine

1. el momento magnético de la espira expresándolo por sus componentes en la referencia fija en función de θ.
2. el par motor en función de θ.
3. la ecuación diferencial que satisface θ.
4. el periodo de las pequeñas oscilaciones.

Preguntas

1. Calcule el momento magnético de la espira expresándolo por sus componentes en la referencia fija en función de θ .

   Respuesta:

   El vector que representa la superficie de la espira es

   $$\boldsymbol{S} = \pi R^2 \boldsymbol{k} = \pi R^2(-\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j}_1 + \cos\theta \boldsymbol{k}_1)$$

   con lo que

   $$\boldsymbol{m} = \pi R^2 I(-\operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j}_1 + \cos\theta \boldsymbol{k}_1)$$

2. Obtenga el par motor en función de θ

RESPUESTA:

La fórmula para el par en una espira en el seno de un campo de inducción magnética constante es

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{N} = -\pi R^2 BI \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{i}_1 \tag{2}$$

3. Determine la ecuación diferencial que satisface θ.

RESPUESTA:

Puede realizarse mediante

$$\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} = -\pi R^2 BI \operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\pi BI}{M} \operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4}$$

4. Calcule el periodo de las pequeñas oscilaciones.

RESPUESTA:

Linealizando

$$\Omega^2 = \frac{2\pi BI}{M} \tag{5}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi M}{BI}} \tag{6}$$