Devanado esférico

Ampliación de Física II

Introducción

Se incluye este problema dado su especial interés como medio de creación de una inducción magnética uniforme en un volumen esférico. Se resuelve con carácter previo una integral y se aborda a continuación el problema propiamente dicho.

Previo

Como preparación al problema enunciado más adelante, se procede a calcular la integral

$$\boldsymbol{J}(P) = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

extendida sobre una superficie esférica de radio R, centrada en el origen y con su elemento de área orientado hacia el exterior, siendo r la distancia desde P al punto de la superficie esférica donde se integra.

En primer lugar, se elije el eje z tal que $\boldsymbol{OP} = a\boldsymbol{k}, a \geq 0$ de modo que, por simetría $\boldsymbol{J} = I\boldsymbol{k}$ donde

$$I = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$I = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}} \mathrm{d}\theta$$

$$I = 2\pi R^2 I'$$

donde

$$I' = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}} \mathrm{d}\theta$$

Para calcular I' se procede a una integración por partes

$$u = \cos\theta \Rightarrow \mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}} \Rightarrow v = \frac{1}{aR}\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta}$$

con lo que

$$I' = \left(\frac{1}{aR} \cos\theta \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta} \right)_0^\pi + \frac{1}{aR} \int_0^\pi \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta$$

$$I' = \left(\frac{1}{aR} \cos\theta \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta} \right)_0^\pi + \frac{1}{aR} \int_0^\pi \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \mathrm{d}\theta$$

$$I' = -\frac{1}{aR} \left(|R+a| - |R-a| \right) + \frac{1}{3a^2R^2} \left(\sqrt{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^3} \right)_0^\pi$$

$$I' = -\frac{1}{aR} \left(|R+a| - |R-a| \right) + \frac{1}{3a^2R^2} \left(|R+a|^3 - |R-a|^3 \right)$$

Para proseguir se distinguen dos casos

1.- $a \leq R$ En este caso $|R-a| = R - a$ con lo que

$$I' = -2\frac{1}{R} + \frac{1}{3a^2R^2} \left(a^3 + 3a^2R + 3R^2a + R^3 - (R^3 - 3R^2a + 3Ra^2 - a^3) \right)$$

$$I' = \frac{2a}{3R^2}$$

y

$$\boldsymbol{J} = \frac{4\pi}{3} \boldsymbol{OP}$$

2.- $a > R$ En este caso $|R-a| = a - R$ con lo que

$$I' = -2\frac{1}{R} + \frac{1}{3a^2R^2} \left(a^3 + 3a^2R + 3R^2a + R^3 + (R^3 - 3R^2a + 3Ra^2 - a^3) \right)$$

$$I' = \frac{2R}{3a^2}$$

y

$$\boldsymbol{J} = \frac{4\pi R^3}{3|\boldsymbol{OP}|^3} \boldsymbol{OP} = \frac{V}{|\boldsymbol{OP}|^3} \boldsymbol{OP}$$

Problema

Una densidad de corriente superficial definida en cada punto A de una superficie esférica de radio R y centro O está definida por la expresión

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \boldsymbol{k} \times \frac{\boldsymbol{OA}}{|\boldsymbol{OA}|}$$

donde $\boldsymbol{k}$ es el vector unitario de un sistema de referencia ortonormal con origen en O.

Se desea obtener la inducción magnética en puntos situados en el interior y el exterior de la superficie esférica.

Solución:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \lambda \boldsymbol{k}}{4\pi} \times \oiint \frac{\boldsymbol{g}}{r} \mathrm{d}S$$

donde

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{OA}}{|\boldsymbol{OA}|}$$

es un vector unitario normal a la superficie esférica y dirigido hacia el exterior.

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \lambda \boldsymbol{k}}{4\pi} \times \oiint \frac{1}{r} \mathrm{d}S$$

1.- Punto en el interior En este caso

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \lambda}{3} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{OP} = \frac{\mu_0 \lambda}{3} \rho \boldsymbol{u}_\varphi$$

y la inducción es

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \lambda \boldsymbol{k}$$

2.- Punto en el exterior

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \lambda R^3}{3 r^3} \rho \boldsymbol{u}_\varphi$$

el rotacional vale

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial \rho} \boldsymbol{k} - \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial z} \boldsymbol{u}_\rho \right)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \lambda R^3}{3\rho} ()$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \lambda R^3}{3} \left[\frac{3(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{1}{r^3} \boldsymbol{k} \right]$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \lambda V}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{1}{r^3} \boldsymbol{k} \right]$$

que equivale al campo creado por una distribución de momentos magnéticos de densidad volumínica

$$\boldsymbol{M} = \lambda \boldsymbol{k}$$