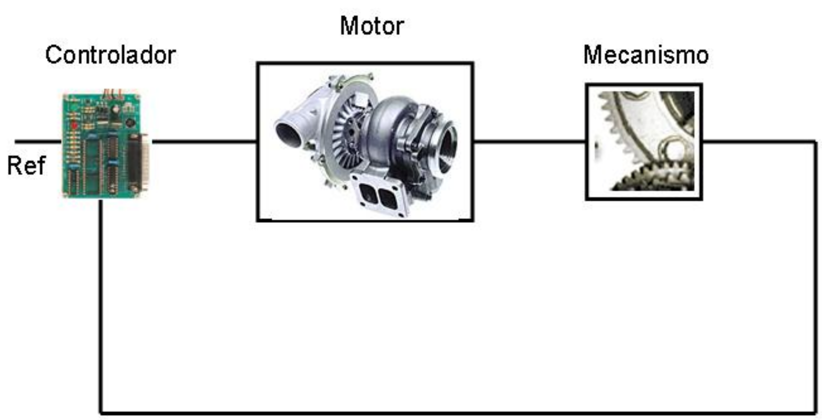
Cálculo de las Acciones Motoras en Mecánica Analítica

1. Planteamiento general



El diseño típico de la motorización de un sistema mecánico $\mathfrak{S}$ es el que se muestra en la figura 1. Su posición viene definida mediante los valores de un conjunto de parámetros que pueden ser abscisas, ángulos, etc. Los valores de estas variables son medidos continuamente mediante un sistema, generalmente electrónico, el cual los compara con los que previamente han sido programados por el ingeniero. A partir del resultado de la comparación, el sistema de control aumenta o disminuye enérgicamente el valor de las acciones motoras, de modo que el mecanismo evolucione en unos márgenes muy estrechos en torno al movimiento elegido. De una forma similar a la que desarrolla el conductor de un vehículo que desea mantener una evolución predeterminada de la velocidad de su automóvil, el dispositivo de control simplemente aumenta o disminuye la acción motora lo que sea necesario para satisfacer las consignas predefinidas, basándose en la diferencia entre los valores reales y los deseados de las coordenadas.

La mayor cantidad de los sistemas mecánicos proyectados por ingenieros tienen por objeto la realización de movimientos predeterminados. El diseño cinemático se encarga de disponer los elementos necesarios para transformar los movimientos que se producen en algunas partes del mecanismo en los que se desea obtener en otras. El análisis dinámico, por su parte, calcula las acciones motoras (fuerzas o pares) necesarias para producir las evoluciones predefinidas.

Aquellos motores que, mediante los dispositivos de control adecuados, originen un movimiento previamente conocido de su parte móvil (émbolo o pistón en los lineales y rótor en los rotativos) se comportan como ligaduras, en general móviles, cuyas fuerzas o pares son desconocidos inicialmente.

En los mecanismos cuyo movimiento está totalmente predeterminado el cálculo de las acciones motoras, al igual que las acciones de las ligaduras convencionales, no requiere de la integración de ecuaciones diferenciales, ni siquiera plantea la búsqueda de primitivas, sino únicamente la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, muchas veces desacopladas.

Una vez obtenidas las acciones necesarias, el ingeniero debe elegir el motor capaz de proporcionarlas. Para esto debe utilizar la información de las curvas de funcionamiento de cada motor. En el caso de los rotativos habitualmente se proporcionan curvas donde se representa el par máximo que puede aplicar en función de su velocidad de giro (la del rótor respecto al estátor). En principio, el motor elegido debe presentar una curva que se sitúe por encima de la que se obtiene del estudio dinámico del mecanismo.

Siguiendo con los motores rotativos, aunque las ideas presentadas son aplicables a cualquier otro, es posible aumentar el par en la proporción necesaria, aunque a costa de disminuir la velocidad en la misma proporción; es decir, se puede, mediante la variación de los radios de un sistema de dos ruedas de fricción, obtener, a partir de la curva de funcionamiento inicial del motor, otra más estrecha aunque más alta, de forma que el área definida entre la curva y el eje de las velocidades quede invariable. De esta forma, con un sistema formado por el motor más una sencilla caja de cambios, se pueden tener acciones motoras mucho más grandes aunque a velocidades más lentas que las disponibles sólo con el motor.

En muchos sistemas se desea que un eje gire a velocidad uniforme Ω, para lo que puede necesitar un par máximo N_M.

En este caso, acoplando una caja de cambios se puede lograr que en el eje motor, el par y la velocidad sean cualesquiera de los que pertenezcan a la hipérbola

$$N\omega = N_M\Omega$$

eligiendo adecuadamente la relación de cambio.

Para el cálculo de las acciones motoras referidas anteriormente en el contexto de la mecánica analítica, las siguientes consideraciones son muy útiles:

- En motores rotativos, si N es el par motor y φ es el ángulo girado por el rótor respecto al estátor, entonces la componente según la coordenada q_j del par motor es

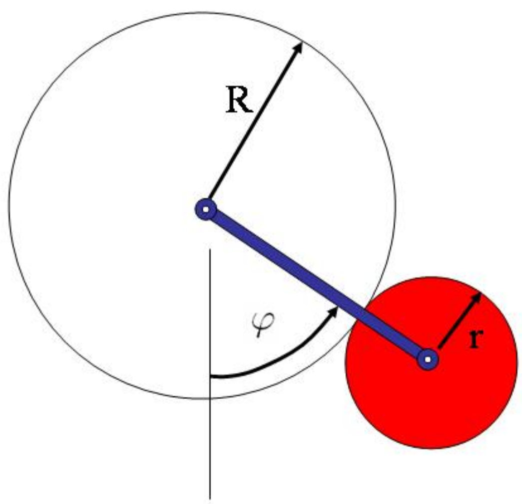
$$Q_j^m = N \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}$$

- En motores lineales, si F es la fuerza motora y ℓ es el desplazamiento experimentado por el émbolo o pistón respecto al cilindro, entonces la componente según la coordenada q_j de la fuerza motora es

$$Q_j^m = F \frac{\partial \ell}{\partial q_j}$$

2. Problema resuelto

Un cilindro σ de revolución de centro M, masa m y radio r puede rodar, pero no deslizar, por el exterior de una circunferencia de radio R y centro O. Una varilla ν de masa despreciable une los centros M, O, en los que se articula a σ y al sistema fijo respectivamente, pudiendo girar libremente respecto a cada uno de ellos (ver problema cinemático). El plano del mecanismo es vertical.



I.- Si se supone que inicialmente el sistema se encuentra posicionado de forma que la varilla esté vertical con el punto M situado por debajo de O, y que se elige como parámetro de posición el ángulo φ que forma la vertical descendente con el vector $\boldsymbol{OM}$, orientado positivamente según el sentido antihorario, calcule:

1. la energía cinética del sistema, utilizando el ángulo φ como única coordenada

   Respuesta:

   La relación entre la rotación ω de σ y $\dot{\varphi}$ es

   $$\omega r = \dot{\varphi}(R+r) \Rightarrow \omega = \frac{(R+r)}{r}\dot{\varphi}$$

   Aplicando el segundo teorema de König se tiene

   $$T = \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\frac{(R+r)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2$$

2. la energía potencial gravitatoria del sistema

   Respuesta:

   $$U = -mg(R+r)\cos\varphi$$

3. la función lagrangiana del sistema

   Respuesta:

   $$L = T - U = \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R+r)\cos\varphi$$

4. la ecuación diferencial que determina la evolución de φ

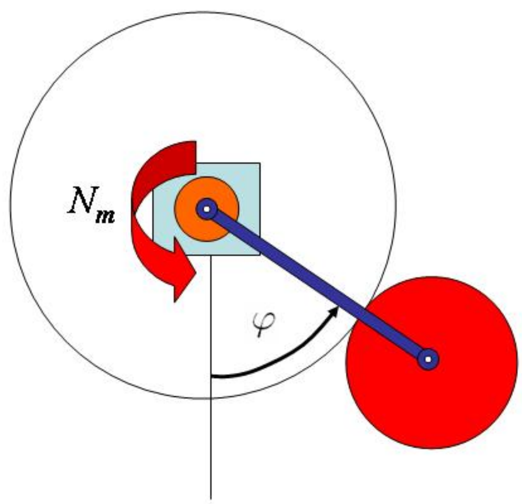
   Respuesta:

   Aplicando las ecuaciones de Lagrange, se tiene

   $$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\frac{3}{2}(R+r)}\operatorname{sen}\varphi = 0$$

Lo que constituye la ecuación de un péndulo de longitud equivalente $\frac{2}{3}(R+r)$

II.- Se desea que el mecanismo anterior evolucione de forma que la varilla ν describa un movimiento de rotación uniforme en torno a O, de modo que el punto M se mueva siempre con una velocidad v constante. Para eso se coloca un motor rotativo $\mathcal{M}$ con un sistema de control realimentado, con su estátor fijo y su rótor unido a la varilla ν, siendo despreciable la masa de dicho rótor. Se desea obtener las características exigibles a dicho motor, con el fin de seleccionarlo de entre los que están disponibles en un catálogo. Se supone, además que el rozamiento viscoso determina un sistema de fuerzas sobre el sistema cuya componente generalizada es $V_\varphi = -\gamma\dot{\varphi}$.



Dado que el par motor no deriva, en general, de un potencial, se utilizará su fuerza generalizada para aplicar las ecuaciones de Lagrange.

5. Obtenga la relación entre el par N suministrado por el motor y la fuerza generalizada según la coordenada φ

Respuesta:

Aplicando la fórmula, se obtiene simplemente

$$Q_\varphi = N\frac{\partial \varphi_m}{\partial \varphi} = N$$

donde φ_m es el ángulo que gira el rótor respecto al estátor y que en este caso coincide con φ.

6. Aplique las ecuaciones de Lagrange para obtener N en función de $\varphi, \dot{\varphi}$

Respuesta:

En este caso, dado que el peso deriva de un potencial y que no vamos a considerar si el par motor lo hace, utilizamos una lagrangiana parcial y las fuerzas generalizadas del resto de las acciones sobre el sistema.

$$L' = \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R+r)\cos\varphi$$

$$Q'_\varphi = N - \gamma\Omega$$

con lo que

$$mg(R+r)\operatorname{sen}\varphi = N - \gamma\Omega$$

7. Halle los valores máximos del par que debe suministrar el motor para acelerar o frenar el mecanismo

Respuesta:

Obviamente, cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ el valor de N es máximo y vale $mg(R+r)+\gamma\Omega$. Cuando $\operatorname{sen}\varphi < 0$, entonces se tiene un par de frenado, que puede suponerse obtenido de un sistema de frenado auxiliar o del propio motor, y cuyo valor máximo es $mg(R+r)-\gamma\Omega$. Si $mg(R+r) < \gamma\Omega$, entonces no sería necesario aplicar ningún par de sentido opuesto a la rotación y por lo tanto en ningún momento habría que frenar el sistema.

III.- Se dispone de un conjunto de motores asíncronos cuyas curvas de funcionamiento (par máximo N_M / rotación ω_m) verifican la ecuación

$$N_m = K\left(1 - \frac{\omega_m}{\alpha}\right)$$

donde K es el parámetro que identifica la fuerza de cada motor en el catálogo (a mayor K, más caro) y α es una constante para todos los motores.

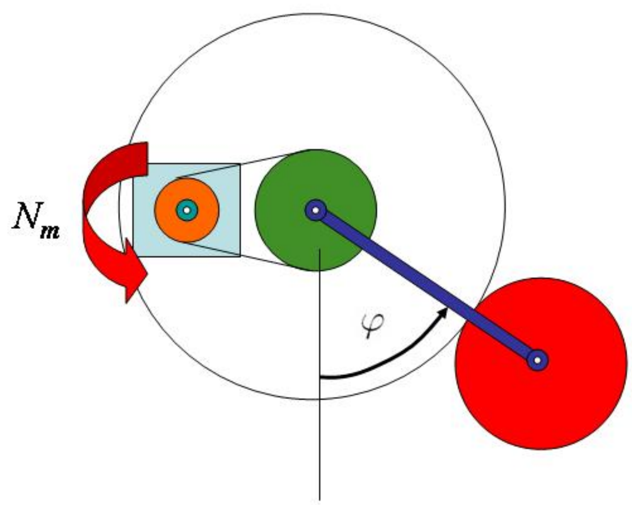
8. Obtenga el mínimo valor de K que permita que el sistema funcione

Respuesta:

Se trata de calcular el motor que suministra al menos el par máximo calculado anteriormente (N_M) a la velocidad Ω. Por lo tanto

$$K\left(1-\frac{\Omega}{\alpha}\right) \geq N_M = mg(R+r)+\gamma\Omega \Rightarrow K \geq \frac{mg(R+r)+\gamma\Omega}{1-\frac{\Omega}{\alpha}}$$

IV.- Se desea disponer una etapa reductora, que multiplique por A el par suministrado por el motor, aunque divida entre A su velocidad de giro, entre el eje de dicho motor y el de la varilla, lo que puede rebajar la constante K exigida al motor. Si esta etapa se materializa por un sistema de correa, como indica la figura, A sería simplemente la relación entre los radios de las poleas.



9. Obtenga la curva, en el plano $N_m\omega_m$ que describe el punto de funcionamiento de par máximo del motor al variar la constante A.

RESPUESTA:

Se trata de una hipérbola equilátera de ecuación

$$N_m \omega_m = N_M \Omega$$

10. Halle el valor de K mínimo que especifique un motor del catálogo y la constante A correspondiente, que permita el funcionamiento del sistema

RESPUESTA:

Se trata de buscar el motor cuya curva sea tangente a la hipérbola anterior. Para eso hallamos la pendiente de ambas curvas y las igualamos

$$K\frac{1}{\alpha} = \frac{N_M \Omega}{\omega_m^2} \Rightarrow K = \frac{N_M \Omega \alpha}{\omega_m^2}$$

También igualamos los valores del par

$$\frac{N_M \Omega}{\omega_m} = K\left(1 - \frac{\omega_m}{\alpha}\right)$$

donde sustituyendo el valor de K se tiene una ecuación en ω_m

$$\frac{N_M \Omega}{\omega_m} = \frac{N_M \Omega \alpha}{\omega_m^2}\left(1 - \frac{\omega_m}{\alpha}\right)$$

$$\frac{\omega_m}{\alpha} = 1 - \frac{\omega_m}{\alpha} \Rightarrow \omega_m = \frac{\alpha}{2}$$

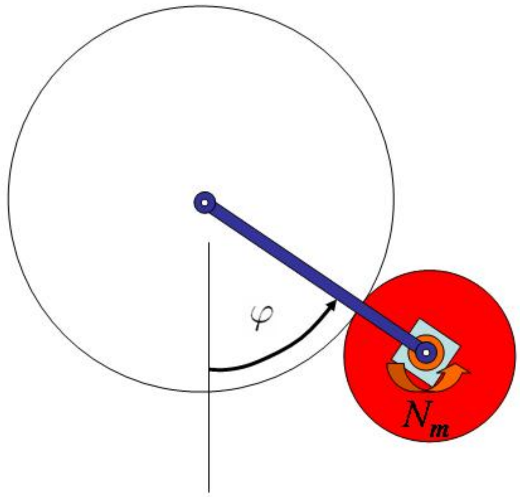
es decir

$$A = 2\frac{\Omega}{\alpha}$$

y

$$K = 4\frac{N_M \Omega}{\alpha}$$

V.- Se baraja ahora la posibilidad de acoplar el motor con el estátor sobre la varilla ν y el rótor acoplado al círculo σ.



11. Obtenga la fuerza generalizada en este caso

Respuesta:

Aplicando la fórmula para la obtención de la fuerza generalizada, se tiene

$$Q_{\varphi}^{m} = N\frac{\partial \varphi_m}{\partial \varphi}$$

y debido a la cinemática del sistema

$$Q_{\varphi}^{m} = N\frac{R}{r}$$

y la fuerza total es

$$Q_{\varphi} = N\frac{R}{r} - \gamma\Omega$$

12. Recalcule los valores máximos y mínimos del par

RESPUESTA:

Utilizando las mismas fórmulas que en el apartado 6, se tiene

$$mg(R+r)\operatorname{sen}\varphi = N\frac{R}{r} - \gamma\Omega$$

cuyos valores máximo y mínimo son

$$N'_M = \frac{r}{R}\left(mg(R+r) + \gamma\Omega\right)$$

y

$$N'_{min} = \frac{r}{R}\left(mg(R+r) - \gamma\Omega\right)$$

El valor máximo del par es sensiblemente inferior al del caso anterior si r es mucho menor que R.

13. Recalcule el mínimo valor de K que identifique un motor de la serie capaz de mover el sistema sin ningún acoplamiento intermedio

RESPUESTA:

En este caso

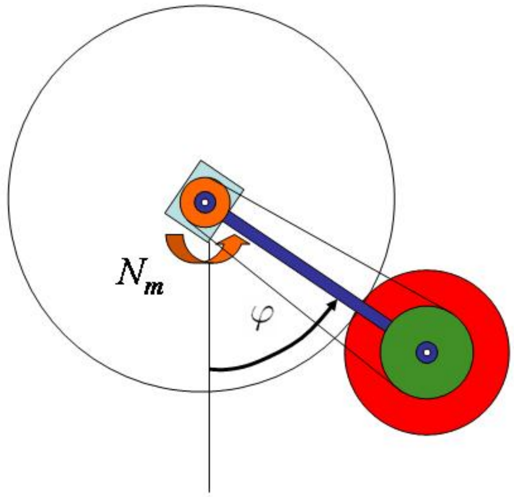
$$N_M = K\left(1 - \frac{R\Omega}{r\alpha}\right)$$

de modo que

$$K \geq \frac{N'_M}{1 - \frac{R\Omega}{r\alpha}}$$

14. Obtenga el nuevo valor mínimo de K si se permite un acoplamiento mediante, por ejemplo, una correa de transmisión, como en el caso anterior

RESPUESTA:



Repitiendo los cálculos del apartado 10, sustituyendo en este caso, los valores de N_M y de la velocidad del motor, se tiene

$$A' = 2\frac{R\Omega}{r\alpha}$$

$$K' = 4\frac{N'_M R\Omega}{r\alpha}$$

15. Compare las dos soluciones (apartados 10 y 14) y elija un de ellas

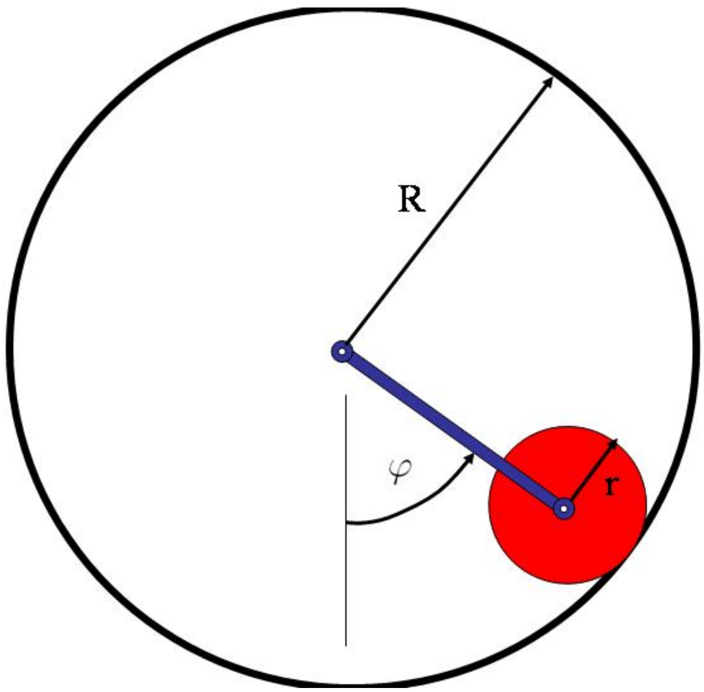
Respuesta:

$$K' = 4\frac{\Omega\left(mg(R+r)+\gamma\Omega\right)}{\alpha} = K$$

por lo que, dado que el motor es el mismo, constructivamente es mucho mejor dejar el estátor del motor fijo (solución correspondiente al apartado 10).

3. Variación del problema anterior

Un cilindro σ de revolución de centro M, masa m y radio r puede rodar, pero no deslizar, por el interior de una circunferencia de radio R y centro O. Una varilla ν de masa despreciable une los centros M, O, en los que se articula a σ y al sistema fijo respectivamente, pudiendo girar libremente respecto a cada uno de ellos (ver problema cinemático). El plano del mecanismo es vertical.



I.- Si se supone que inicialmente el sistema se encuentra posicionado de forma que la varilla esté vertical con el punto M situado por debajo de O, y que se elige como parámetro de posición el ángulo φ que forma la vertical descendente con el vector $\boldsymbol{OM}$, orientado positivamente según el sentido antihorario, calcule:

1. la energía cinética del sistema, utilizando el ángulo φ como única coordenada

RESPUESTA:

La relación entre la rotación ω de σ y $\dot{\varphi}$ es

$$\omega r = -\dot{\varphi}(R - r) \Rightarrow \omega = -\frac{R - r}{r}\dot{\varphi}$$

Aplicando el segundo teorema de König se tiene

$$T = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$$

2. la energía potencial gravitatoria del sistema

RESPUESTA:

$$U = -mg(R-r)\cos\varphi$$

3. la función lagrangiana del sistema

RESPUESTA:

$$L = T - U = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi$$

4. la ecuación diferencial que determina la evolución de φ

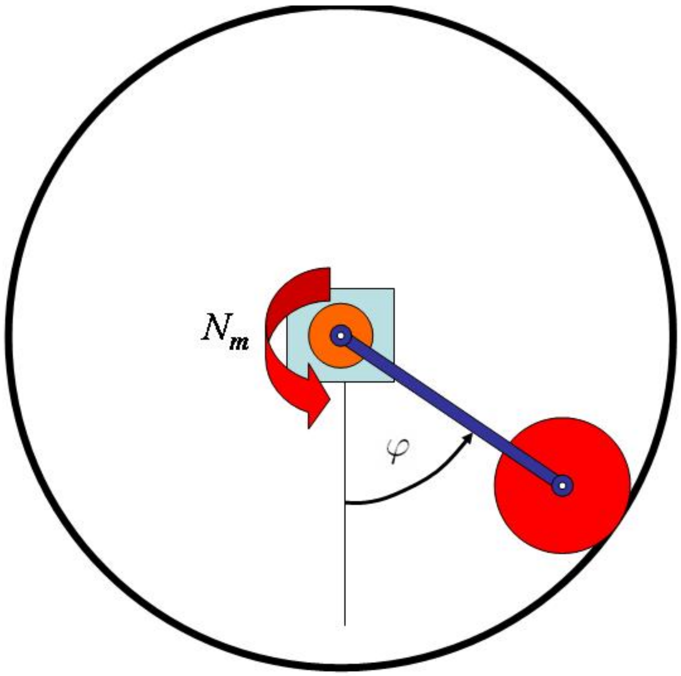
RESPUESTA:

Aplicando las ecuaciones de Lagrange, se tiene

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\frac{3}{2}(R-r)}\operatorname{sen}\varphi = 0$$

Lo que constituye la ecuación de un péndulo de longitud equivalente $\frac{2}{3}(R-r)$

II.- Se desea que el mecanismo anterior evolucione de forma que la varilla ν describa un movimiento de rotación uniforme en torno a O, de modo que el punto M se mueva siempre con una velocidad v constante. Para eso se coloca un motor rotativo $\mathcal{M}$ con un sistema de control realimentado, con su estátor fijo y su rótor unido a la varilla ν, siendo despreciable la masa de dicho rótor. Se desea obtener las características exigibles a dicho motor, con el fin de seleccionarlo de entre los que están disponibles en un catálogo. Se supone, además que el rozamiento viscoso determina un sistema de fuerzas sobre el sistema cuya componente generalizada es $V_\varphi = -\gamma\dot{\varphi}$.



Dado que el par motor no deriva, en general, de un potencial, se utilizará su fuerza generalizada para aplicar las ecuaciones de Lagrange.

5. Obtenga la relación entre el par N suministrado por el motor y la fuerza generalizada según la coordenada φ

RESPUESTA:

Aplicando la fórmula, se obtiene simplemente

$$Q_\varphi = N\frac{\partial \varphi_m}{\partial \varphi} = N$$

donde φ_m es el ángulo que gira el rótor respecto al estátor y que en este caso coincide con φ.

6. Aplique las ecuaciones de Lagrange para obtener N en función de $\varphi, \dot{\varphi}$

RESPUESTA:

En este caso, dado que el peso deriva de un potencial y que no vamos a considerar si el par motor lo hace, utilizamos una lagrangiana parcial y las fuerzas generalizadas del resto de las acciones sobre el sistema.

$$L' = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi$$

$$Q'_\varphi = N - \gamma\Omega$$

con lo que

$$mg(R-r)\operatorname{sen}\varphi = N - \gamma\Omega$$

7. Halle los valores máximos del par que debe suministrar el motor para acelerar o frenar el mecanismo

Respuesta:

Obviamente, cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ el valor de N es máximo y vale $mg(R-r) + \gamma\Omega$. Cuando $\operatorname{sen}\varphi < 0$, entonces se tiene un par de frenado, que puede suponerse obtenido de un sistema de frenado auxiliar o del propio motor, y cuyo valor máximo es $mg(R-r) - \gamma\Omega$. Si $mg(R-r) < \gamma\Omega$, entonces no sería necesario aplicar ningún par de sentido opuesto a la rotación y por lo tanto en ningún momento habría que frenar el sistema.

III.- Se dispone de un conjunto de motores asíncronos cuyas curvas de funcionamiento (par máximo N_M / rotación ω_m) verifican la ecuación

$$N_m = K\left(1 - \frac{\omega_m}{\alpha}\right)$$

donde K es el parámetro que identifica la fuerza de cada motor en el catálogo (a mayor K, más caro) y α es una constante para todos los motores.

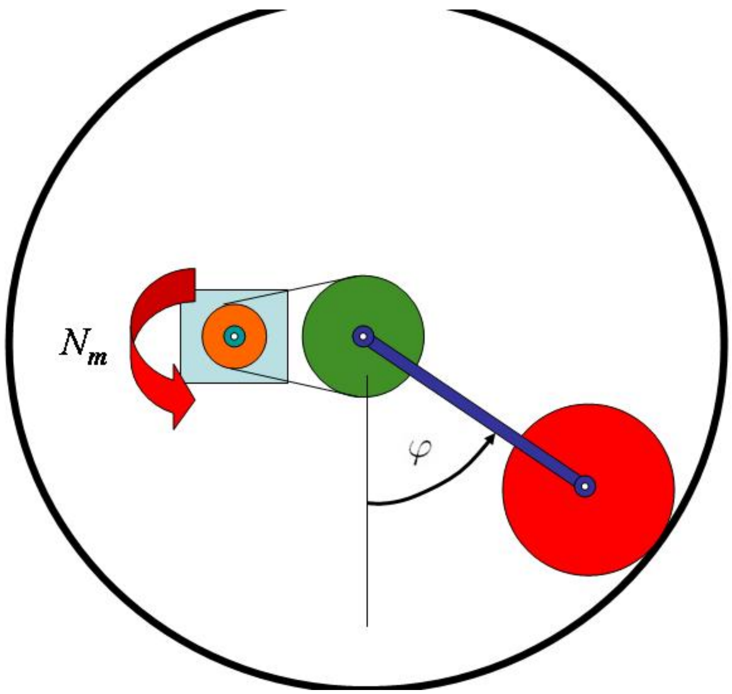
8. Obtenga el mínimo valor de K que permita que el sistema funcione

Respuesta:

Se trata de calcular el motor que suministra al menos el par máximo calculado anteriormente (N_M) a la velocidad Ω. Por lo tanto

$$K\left(1 - \frac{\Omega}{\alpha}\right) \geq N_M = mg(R-r) + \gamma\Omega \Rightarrow K \geq \frac{mg(R-r) + \gamma\Omega}{1 - \frac{\Omega}{\alpha}}$$

IV.- Se desea disponer una etapa reductora, que multiplique por A el par suministrado por el motor, aunque divida entre A su velocidad de giro, entre el eje de dicho motor y el de la varilla, lo que puede rebajar la constante K exigida al motor. Si esta etapa se materializa por un sistema de correa, como indica la figura, A sería simplemente la relación entre los radios de las poleas.



9. Obtenga la curva, en el plano $N_m\omega_m$ que describe el punto de funcionamiento de par máximo del motor al variar la constante A.

RESPUESTA:

Se trata de una hipérbola equilátera de ecuación

$$N_m\omega_m = N_M\Omega$$

10. Halle el valor de K mínimo que especifique un motor del catálogo y la constante A correspondiente, que permita el funcionamiento del sistema

RESPUESTA:

Se trata de buscar el motor cuya curva sea tangente a la hipérbola anterior. Para eso hallamos la pendiente de ambas curvas y las igualamos

$$K\frac{1}{\alpha} = \frac{N_M \Omega}{\omega_m^2} \Rightarrow K = \frac{N_M \Omega \alpha}{\omega_m^2}$$

También igualamos los valores del par

$$\frac{N_M \Omega}{\omega_m} = K\left(1 - \frac{\omega_m}{\alpha}\right)$$

donde sustituyendo el valor de K se tiene una ecuación en ω_m

$$\frac{N_M \Omega}{\omega_m} = \frac{N_M \Omega \alpha}{\omega_m^2}\left(1 - \frac{\omega_m}{\alpha}\right)$$

$$\frac{\omega_m}{\alpha} = 1 - \frac{\omega_m}{\alpha} \Rightarrow \omega_m = \frac{\alpha}{2}$$

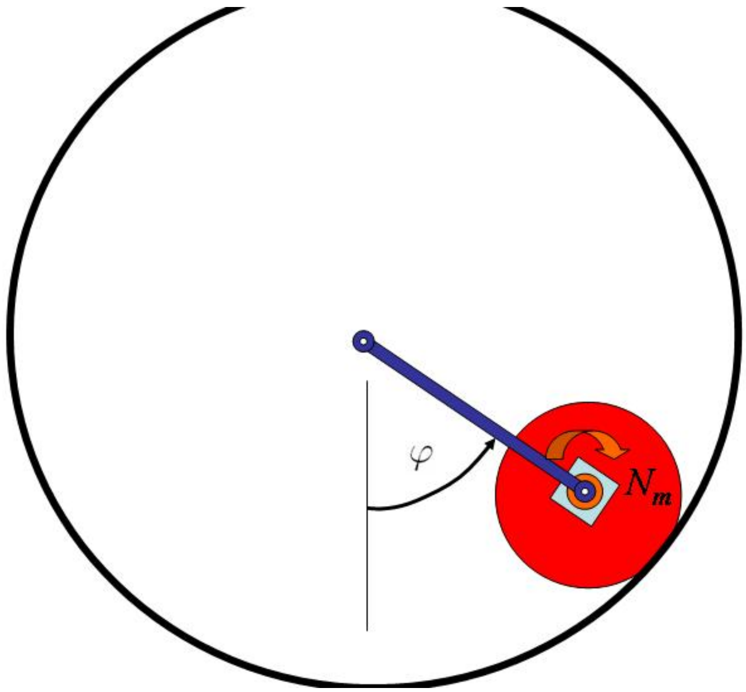
es decir

$$A = 2\frac{\Omega}{\alpha}$$

y

$$K = 4\frac{N_M \Omega}{\alpha}$$

V.- Se baraja ahora la posibilidad de acoplar el motor con el estátor sobre la varilla ν y el rótor acoplado al círculo σ.



11. Obtenga la fuerza generalizada en este caso, considerando que, dado que la rotación del motor tendrá sentido horario, positivos los momentos motores en dicho sentido

    Respuesta:

    Aplicando la fórmula para la obtención de la fuerza generalizada, se tiene

    $$Q_{\varphi}^{m} = -N\frac{\partial \varphi_m}{\partial \varphi}$$

    y debido a la cinemática del sistema

    $$Q_{\varphi}^{m} = N\frac{R}{r}$$

    y la fuerza total es

    $$Q_{\varphi} = N\frac{R}{r} - \gamma\Omega$$

12. Recalcule los valores máximos del par motor y de frenado

Respuesta:

Utilizando las mismas fórmulas que en el apartado 6, se tiene

$$mg(R-r)\operatorname{sen}\varphi = N\frac{R}{r} - \gamma\Omega$$

cuyos valores máximos de motor y freno son

$$N'_M = \frac{r}{R}\left(mg(R-r)+\gamma\Omega\right)$$

y

$$N'_F = \frac{r}{R}\left(mg(R-r)-\gamma\Omega\right)$$

El valor máximo del par es sensiblemente inferior al del caso anterior si r es mucho menor que R.

13. Recalcule el mínimo valor de K que identifique un motor de la serie capaz de mover el sistema sin ningún acoplamiento intermedio

Respuesta:

En este caso

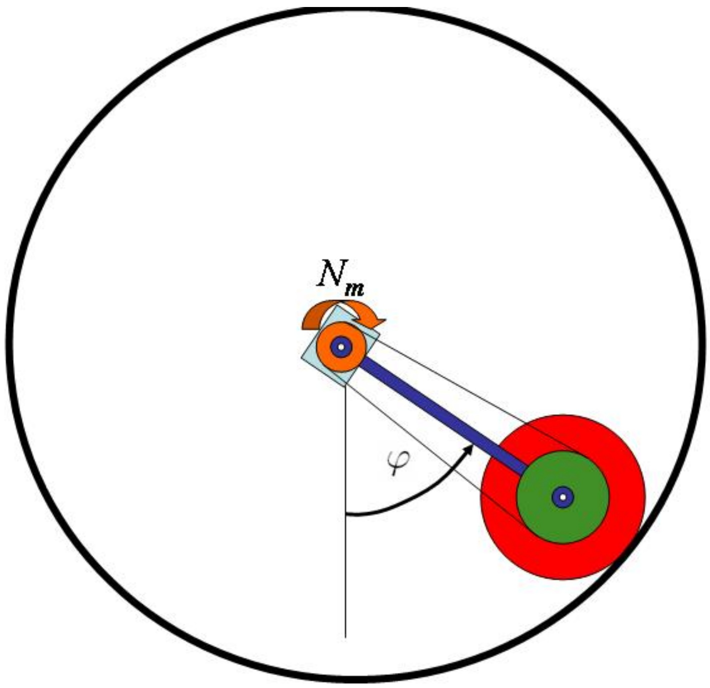
$$N_M = K\left(1 - \frac{R\Omega}{r\alpha}\right)$$

de modo que

$$K \geq \frac{N'_M}{1-\frac{R\Omega}{r\alpha}}$$

14. Obtenga el nuevo valor mínimo de K si se permite un acoplamiento mediante, por ejemplo, una correa de transmisión, como en el caso anterior

Respuesta:



Repitiendo los cálculos del apartado 10, sustituyendo en este caso, los valores de N_M y de la velocidad del motor, se tiene

$$A' = 2\frac{R\Omega}{r\alpha}$$

$$K' = 4\frac{N'_M R\Omega}{r\alpha}$$

15. Compare las dos soluciones (apartados 10 y 14) y elija un de ellas

RESPUESTA:

$$K' = 4\frac{\Omega\,(mg(R-r)+\gamma\Omega)}{\alpha} = K$$

por lo que, dado que el motor es el mismo, constructivamente es mucho mejor dejar el estátor del motor fijo (solución correspondiente al apartado 10).