

# Problema de Euler-Poinsot

## 1. Introducción

El estudio de la dinámica del sólido rígido ligado continúa con el sólido rígido con un punto fijo. En primer lugar se estudiarán las ecuaciones diferenciales que rigen su movimiento, y se resolverán en dos casos distintos

- Movimiento por inercia (*problema de Euler Poinsot*)
- Movimiento bajo la acción de la gravedad (*problema de Lagrange Poisson*)

El movimiento del sólido con punto fijo es un movimiento con tres grados de libertad, por lo tanto las ecuaciones en las que desmboquemos serán tres ecuaciones diferenciales de segundo orden (orden total = seis) que en general serán no lineales y setarán acopladas. El problema difícilmente se puede reducir a cuadraturas. De hecho, clásicamente sólo se han presentado los casos que aquí se describen.

Por otra parte, cabe destacar la doble trascendencia de los resultados que se obtendrán para el movimiento del sólido rígido con punto fijo, ya que, como se verá más adelante, cualquier problema de dinámica del sólido rígido libre puede reducirse a un problema de dinámica del punto *libre*, más un problema de sólido rígido con un punto fijo.

El estudio del sólido rígido con punto fijo tiene aplicación en bastantes campos de la Mecánica. En la Mecánica celeste es fundamental para estudiar fenómenos como la precesión de Chandler, la precesión de los equinoccios, etc. En la Mecánica técnica es la base para el estudio de los *giróscopos*, que serán tratados al final del capítulo.

## 2. Ecuaciones del movimiento

En esta sección se deducen las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo. Se supondrá que el sólido está sometido a la acción de un conjunto de fuerzas aplicadas, cuya resultante es  $\vec{F}$  y cuyo momento respecto al punto fijo es  $\vec{M}$ . Además de las fuerzas aplicadas, existirá una reacción  $\vec{R}$  en el punto fijo  $O$ . En primer lugar, se hace notar que se trata de un sistema con tres grados de libertad. Si se elige una base de referencia fija  $\{O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$  y una solidaria al sólido  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  ambas con origen en el punto fijo del sólido. Si bien no se exige ninguna condición sobre la orientación de la terna fija, se tomarán los ejes de la terna móvil según un sistema ortogonal de ejes del elipsoide de inercia del punto fijo  $O$ , de forma que  $I_x > I_y > I_z$ . Como parámetros que posicionen el sólido respecto al sistema móvil se tomarán los tres ángulos de Euler  $(\varphi, \theta, \psi)$  que definan  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

respecto a  $\{O, \vec{r}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$ . Las componentes de la rotación  $\vec{\omega}$  del sólido en la base móvil son

$$\begin{cases} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (1)$$

Se necesita aplicar algún principio de la dinámica en el que no intervenga la reacción en el punto fijo. Se utilizará por tanto el teorema del momento cinético respecto a  $O$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

donde

$$\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$$

por otra parte, para evaluar  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  debe tenerse en cuenta que hay que derivar *respecto al sistema fijo* en el cual el tensor de inercia no es constante. Por lo tanto, se utiliza la fórmula

$$\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{L}_o$$

que relaciona las derivadas respecto al sistema móvil y el sistema fijo. Se tiene entonces que, por la elección del sistema de ejes móviles, la expresión matricial en ellos del tensor de inercia es diagonal y

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = I_x \omega_x \vec{r} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$$

por lo tanto

$$\left(\frac{d\vec{L}_o}{dt}\right)_S = I_x \dot{\omega}_x \vec{r} + I_y \dot{\omega}_y \vec{j} + I_z \dot{\omega}_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{L}_o = (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \vec{r} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x \vec{j} + (I_y - I_x \omega_x \omega_y) \vec{k}$$

Por lo que el teorema del momento cinético se tiene

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z \end{cases} \quad (2)$$

que constituyen las *ecuaciones de Euler* las cuales, junto con [1] constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que permiten determinar las funciones del tiempo  $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ , es decir, la evolución del movimiento del sólido rígido.

En cuanto al cálculo de la reacción del punto fijo,  $\vec{R}$ , ésta no presenta especiales problemas, pues una vez resuelto el movimiento se puede despejar directamente de la ecuación

$$\begin{aligned} \vec{R} + \vec{F} &= m \vec{a}_c \\ \vec{R} &= -\vec{F} + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_c + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)) \end{aligned}$$

### 3. Ecuaciones del movimiento por inercia

En esta sección abordamos el problema del movimiento de un sólido al que se sujeta con una rótula por un punto  $O$  y sobre el que el sistema de fuerzas aplicadas es reductible a una fuerza única cuya línea de acción pasa por el punto fijo. Se supone que se dota al sólido de unas condiciones iniciales de posición y velocidad y se quiere calcular la evolución con respecto al tiempo de su rotación  $\vec{\omega}$  y sus ángulos de Euler  $\varphi, \theta, \psi$ .

Como para todos los problemas de movimiento de un sólido rígido con un punto fijo, se parte de las ecuaciones de Euler, que, en este caso, al ser  $\vec{M} = \vec{0}$  se escriben

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = 0 \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0 \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Multiplicando la primera por  $\omega_x$ , la segunda por  $\omega_y$  y la tercera por  $\omega_z$  y sumando las tres ecuaciones se obtiene

$$I_x \omega_x \dot{\omega}_x + I_y \omega_y \dot{\omega}_y + I_z \omega_z \dot{\omega}_z + (I_z - I_y + I_x - I_z + I_y - I_x) \omega_x \omega_y \omega_z = 0$$

de donde

$$\frac{1}{2} \frac{d(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)}{dt} = 0$$

es decir, la energía cinética  $\mathcal{E}_c$  se conserva, lo que era previsible ya que las únicas fuerzas actuantes, al estar aplicadas en un punto fijo, no proporcionan trabajo.

Si seguimos con las ecuaciones anteriores y multiplicamos la primera por  $I_x \omega_x$ , la segunda por  $I_y \omega_y$  y la tercera por  $I_z \omega_z$  y sumamos las tres ecuaciones se obtiene

$$I_x^2 \omega_x \dot{\omega}_x + I_y^2 \omega_y \dot{\omega}_y + I_z^2 \omega_z \dot{\omega}_z + (I_z I_x - I_y I_x + I_x I_y - I_z I_y + I_y I_z - I_x I_z) \omega_x \omega_y \omega_z = 0$$

de donde

$$\frac{d(I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2)}{dt} = 0$$

lo que expresa que la norma del momento cinético  $L^2$  se conserva. Realmente no sólo se conserva la norma de  $\vec{L}$ , sino también su propio valor como vector  $\vec{L} = \vec{L}_0$ , ya que las fuerzas actuantes no dan momento respecto al punto  $O$ . Sin embargo, lo que no se conserva son las componentes de  $\vec{L}$  en la base móvil, aunque sí su norma, pues ésta es la misma en cualquier referencia. Por lo tanto

$$\mathcal{E}_c = K$$

$$L^2 = K'$$

Se definen las siguientes constantes positivas

$$I = \frac{L^2}{2\mathcal{E}_c}$$

$$\Omega = \frac{2\mathcal{E}_c}{L}$$

y por tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned} I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 &= I \Omega^2 \\ I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 &= I^2 \Omega^2 \end{aligned}$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, junto con la segunda ecuación de Euler

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0$$

determina un nuevo sistema de ecuaciones integrado dos veces respecto a las ecuaciones de Euler.

## 4. Integración de las ecuaciones anteriores

A continuación se procede a la integración del sistema.

$$\begin{cases} I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = I \Omega^2 \\ I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = I^2 \Omega^2 \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

En primer lugar se procede a utilizar las dos primeras ecuaciones de [4] para despejar  $\omega_x, \omega_z$  en función de  $\omega_y$ . Multiplicando la primera por  $I_x$  y restando

$$\begin{array}{rclcl} I_x^2 \omega_x^2 & + & I_y I_x \omega_y^2 + I_z I_x \omega_z^2 & = & I I_x \Omega^2 \\ I_x^2 \omega_x^2 & + & I_y^2 \omega_y^2 & + & I_z^2 \omega_z^2 & = & I^2 \Omega^2 \\ 0 & + & I_y (I_x - I_y) \omega_y^2 & + & I_z (I_x - I_z) \omega_z^2 & = & I (I_x - I) \Omega^2 \end{array} \quad (5)$$

y, por lo tanto, se obtiene que  $I \leq I_x$  y además

$$\omega_z^2 = \frac{I(I_x - I)}{I_z(I_x - I_z)} \Omega^2 - \frac{I_y(I_x - I_y)}{I_z(I_x - I_z)} \omega_y^2$$

llamando  $\alpha^2 = \frac{I(I_x - I)}{I_y(I_x - I_y)} \Omega^2$  se tiene

$$\omega_z^2 = \frac{I_y(I_x - I_y)}{I_z(I_x - I_z)} (\alpha^2 - \omega_y^2) \quad (6)$$

Si se realiza la misma operación para despejar  $\omega_x^2$ , se tiene

$$\begin{array}{rclcl} I_x I_z \omega_x^2 & + & I_y I_z \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 & = & I I_z \Omega^2 \\ I_x^2 \omega_x^2 & + & I_y^2 \omega_y^2 & + & I_z^2 \omega_z^2 & = & I^2 \Omega^2 \\ I_x (I_x - I_z) \omega_x^2 & + & I_y (I_y - I_z) \omega_y^2 & + & 0 & = & I (I - I_z) \Omega^2 \end{array} \quad (7)$$

y, por lo tanto, se tiene que  $I_z \leq I$  y, siguiendo

$$\omega_x^2 = \frac{I(I - I_z)}{I_x(I_x - I_z)} \Omega^2 - \frac{I_y(I_y - I_z)}{I_x(I_x - I_z)} \omega_y^2$$

llamando  $\beta^2 = \frac{I(I - I_z)}{I_y(I_y - I_z)} \Omega^2$  se tiene

$$\omega_x^2 = \frac{I_y(I_y - I_z)}{I_x(I_x - I_z)} (\beta^2 - \omega_y^2) \quad (8)$$

Sustituyendo en la tercera ecuación de [4]

$$I_y \dot{\omega}_y = \pm (I_y - I_z) \sqrt{\frac{I_y^2 (I_x - I_y)(I_y - I_z)(\alpha^2 - \omega_y^2)(\beta^2 - \omega_y^2)}{I_x I_z (I_x - I_z)^2}}$$

llamando

$$\mu = \sqrt{\frac{(I_x - I_y)(I_y - I_z)}{I_x I_z (I_x - I_z)^2}}$$

queda

$$\dot{\omega}_y = \pm \mu \sqrt{(\alpha^2 - \omega_y^2)(\beta^2 - \omega_y^2)}$$

y la reducción a cuadraturas

$$\int_{\omega_{y0}}^{\omega_y} \frac{d\omega_y}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_y^2)(\beta^2 - \omega_y^2)}} = \pm \mu (t - t_0) \quad (9)$$

#### 4.1. Casos particulares

Según se ha visto, el valor de la constante  $I$  está acotado entre  $I_x$  e  $I_z$ , es decir

$$I_z \leq I \leq I_x$$

Por lo tanto se tienen los siguientes casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A. Casos generales} \left\{ \begin{array}{l} \text{A.1. } I_z < I < I_y \\ \text{A.2. } I_y < I < I_x \end{array} \right. \\ \text{B. Casos particulares} \left\{ \begin{array}{l} \text{B.1. } I = I_z \\ \text{B.2. } I = I_x \\ \text{B.3. } I = I_y \end{array} \right. \end{array} \right.$$

A.1. En este caso, de [5] y [7] se obtiene que  $\beta^2 > \alpha^2$  y de [8] se tiene que  $\omega_y^2 \leq \beta^2 < \alpha^2$  y teniendo en cuenta que [6] se tiene que  $\omega_z$  nunca pasa por cero, es decir siempre conserva el mismo signo. Por lo tanto, según la segunda ecuación de Euler, el vector  $\vec{\omega}$  *precesa* en torno al eje  $z$  en sentido horario si se "mira" desde la parte de éste en la que esté la componente  $\omega_z$ . La ecuación [9] puede reducirse a la forma de Legendre de la integral elíptica con el cambio

$$u = \frac{\omega_y}{\beta}$$

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_y^2} = \beta \sqrt{1 - u^2}$$

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_y^2} = \alpha \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} u^2}$$

$$\text{llamando } k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$d\omega_y = \beta du$$

con lo que se tiene

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \mu\alpha(t-t_0)$$

o bien, tomando  $\sin \varphi = u$

$$\int_{u_0}^u \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mu\alpha(t-t_0)$$

integral elíptica de primera especie en su forma de Legendre.

A.2. Este caso es muy parecido al anterior. De nuevo, utilizando las ecuaciones [5] y [7] y teniendo en cuenta que en este caso  $I_y < I < I_x$  se obtiene que  $\beta^2 < \alpha^2$  y de [8] se tiene que  $\omega_y^2 \leq \alpha^2 < \beta^2$ . De la ecuación [8] se tiene que  $\omega_x$  nunca pasa por cero, es decir siempre conserva el mismo signo. Por lo tanto, según la segunda ecuación de Euler, el vector  $\vec{\omega}$  *precesa* en torno al eje  $x$  en sentido antihorario si se "mira" desde la parte de éste en la que esté la componente  $\omega_x$ . La ecuación [9] puede reducirse a la forma de Legendre de la integral elíptica con el cambio

$$u = \frac{\omega_y}{\alpha}$$

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_y^2} = \alpha\sqrt{1-u^2}$$

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_y^2} = \beta\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}u^2}$$

llamando  $k^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1$

$$d\omega_y = \alpha du$$

con lo que se tiene

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \mu\beta(t-t_0)$$

o bien, tomando  $\sin \varphi = u$  se tiene

$$\int_{u_0}^u \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mu\beta(t-t_0)$$

integral del mismo tipo que la encontrada en A.1.

B.1. Cuando  $I = I_z$  entonces, de la ecuación [7], se tiene que  $\beta = 0$ , lo que hace que la ecuación [8] haga que  $\omega_y = \omega_x = 0$ . Además  $\omega_z = \Omega$ , por lo que la rotación del sólido es una rotación continua de valor constante en torno al eje  $z$ .

B.2. Cuando  $I = I_x$  entonces, de la ecuación [5], se tiene que  $\alpha = 0$ , lo que hace que la ecuación [6] haga que  $\omega_y = \omega_z = 0$ . Además  $\omega_x = \Omega$ , por lo que la rotación del sólido es una rotación continua de valor constante en torno al eje  $x$ .

B.3. Cuando  $I = I_y$ , se tiene que  $\alpha^2 = \beta^2 = \Omega^2$  y la integral elíptica para la componente  $\omega_y$  pasa a ser una integral expresable por funciones elementales. En efecto

$$\mu(t - t_0) = \int_{\omega_{y0}}^{\omega_y} \frac{d\omega_y}{\Omega^2 - \omega_y^2} = \frac{1}{\Omega} (\text{ArcTh} \frac{\omega_y}{\Omega} - \text{ArcTh} \frac{\omega_{y0}}{\Omega})$$

o bien, si se llama

$$A = \text{ArcTh} \frac{\omega_{y0}}{\Omega}$$

queda

$$\omega_y = \Omega \text{Th}(\Omega(t - t_0) + A)$$

Sustituyendo en [8] y [6] queda

$$\omega_x^2 = \frac{I_y(I_y - I_z)}{I_x(I_x - I_z)} \frac{1}{\text{Ch}^2(\Omega(t - t_0) + A)}$$

$$\omega_z^2 = \frac{I_y(I_x - I_y)}{I_z(I_x - I_z)} \frac{1}{\text{Ch}^2(\Omega(t - t_0) + A)}$$

lo que quiere decir que el vector rotación permanece en un plano que contiene al eje  $y$  y tiende asintóticamente a ser paralelo a este eje y tener de módulo  $\Omega$ .

## 5. Angulos de Euler

Una vez resuelta la evolución del vector rotación, se utilizan las ecuaciones

$$\begin{cases} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (10)$$

además, teniendo en cuenta que  $\vec{L} = \vec{L}_0 = I_x \omega_x \vec{i} + I_y \omega_y \vec{j} + I_z \omega_z \vec{k}$  y suponiendo que el tercer eje fijo lleva la dirección de  $\vec{L}_0$  puede obtenerse una tercera ecuación multiplicando escalarmente por los vectores unitarios de la base móvil.

$$\begin{cases} I_x \omega_x &= I \Omega \sin \theta \sin \psi \\ I_y \omega_y &= I \Omega \sin \theta \cos \psi \\ I_z \omega_z &= I \Omega \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

De la tercera ecuación se obtiene

$$\cos \theta = \frac{I_z \omega_z}{I \Omega}$$

$\theta$  Como  $0 \leq \theta \leq \pi$  el valor del coseno es suficiente para determinar el valor de  $\theta$ .  $\psi$  Si se dividen las dos primeras ecuaciones de [11], se obtiene

$$\text{tg} \psi = \frac{I_x \omega_x}{I_y \omega_y}$$

que junto con la primera ecuación, que proporciona el signo del seno de  $\psi$ , lo determina totalmente.  $\varphi$  Si se multiplica la primera ecuación de [10] por  $\sin \psi$ , la segunda por  $\cos \psi$  y se suman, se obtiene

$$\dot{\varphi} \sin \theta = \frac{\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi}{\sin \theta}$$

que junto con las ecuaciones del sistema [11] permiten escribir

$$\dot{\varphi} = I\Omega \frac{I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2}{I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2}$$

que deja reducido a una cuadratura el cálculo de la precesión. Además, la ecuación anterior establece que el sentido de la precesión es siempre el mismo.

Pasemos ahora a estudiar los casos particulares que se analizaron en el cálculo de la rotación del sólido.

Caso B.1.

$$I = I_z \Rightarrow \forall t \quad \vec{\omega} = \Omega \vec{k} \Rightarrow \theta = 0$$

con lo que la línea de nodos queda indeterminada y por lo tanto los ángulos  $\varphi, \psi$ . El movimiento es una rotación uniforme alrededor del eje mayor del elipsoide de inercia. Dicho de otra forma,

*si la rotación inicial del sólido lo es alrededor del eje mayor del elipsoide de inercia del punto fijo, entonces ésta se mantendrá indefinidamente con la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.*

Caso B.2.

$$I = I_x \Rightarrow \forall t \quad \vec{\omega} = \Omega \vec{i} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\varphi} = \Omega \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \Omega(t - t_0)$$

El movimiento es una rotación uniforme alrededor del eje menor del elipsoide de inercia. Dicho de otra forma,

*si la rotación inicial del sólido lo es alrededor del eje menor del elipsoide de inercia del punto fijo, entonces ésta se mantendrá indefinidamente con la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.*

Caso B.3.

$$I = I_y \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\omega} = \Omega \vec{j} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi} = \Omega$$

en este caso, la rotación *tiende a* ser constante y estar alineada con el eje intermedio del elipsoide de inercia, es decir *si las condiciones iniciales del sólido son tales que*

$$\frac{L_0^2}{2\mathcal{E}_c} = I_y$$

*, entonces el sólido tenderá asintóticamente a rotar en torno al eje intermedio del elipsoide con una rotación constante.*

## 6. Caso en que el elipsoide sea de revolución

Se procede a recapitular los sistemas de ecuaciones utilizados hasta este momento

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \begin{cases} I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = I\Omega^2 \\ I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = I^2\Omega^2 \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x = 0 \end{cases}$$

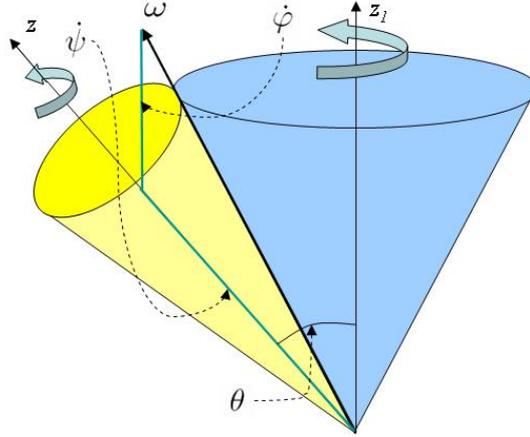


Figura 1: Movimiento por inercia de un sólido con un punto fijo cuyo elipsoide de inercia es de revolución y alargado. El cono de Poincaré móvil (amarillo) rueda por el exterior del fijo (azul), siendo ambos exteriores.

$$\begin{cases} I_x \omega_x = I\Omega \sin \theta \sin \psi \\ I_y \omega_y = I\Omega \sin \theta \cos \psi \\ I_z \omega_z = I\Omega \cos \theta \end{cases}$$

Del segundo sistema se obtiene

$$I_z \dot{\omega}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \omega_{z_0}$$

que, sustituido en la última ecuación del tercer sistema

$$I_z \omega_{z_0} = I\Omega \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{I_z \omega_{z_0}}{I\Omega} = \cos \theta_0$$

Además,

$$\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = \omega_x = \frac{I\Omega \sin \theta \sin \psi}{I_x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{I\Omega}{I_x} = \dot{\phi}_0$$

Por último, la rotación propia

$$\dot{\psi} = \omega_{z_0} - \dot{\phi} \cos \theta_0 = \dot{\phi} \left( \frac{I_x - I_z}{I_z} \right) \cos \theta_0 = \omega_{z_0} \left( \frac{I_x - I_z}{I_x} \right) = \dot{\psi}_0$$

Se tiene pues un movimiento de nutación nula y precesión y rotación propia uniformes. Se tiene por lo tanto un movimiento que se puede describir por la rodadura sin deslizamiento de un cono de Poincaré de revolución móvil sobre un cono de Poincaré también de revolución fijo. La última ecuación permite, además, establecer el modo en que están dispuestos los conos. En efecto, si  $I_x > I_z$  (elipsoide de revolución alargado) la precesión y la rotación propia están

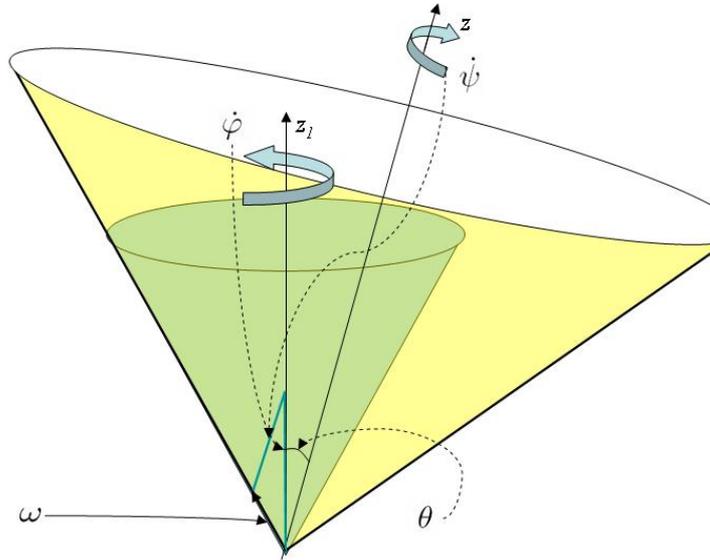


Figura 2: Movimiento por inercia de un sólido con un punto fijo cuyo elipsoide de inercia es de revolución y achatado. El cono de Poincaré móvil (amarillo) rueda por el exterior del fijo (azul) que es interior al móvil.

orientadas hacia el mismo semiespacio y la generatriz de contacto entre los conos se encuentra entre los ejes  $z$  y  $z_1$  con lo que los axoides ruedan exteriormente. Si  $I_z > I_x$  (elipsoide de inercia achatado) entonces es el axoide móvil el que rueda exteriormente sobre el fijo.

## 7. Movimiento según Poincaré

En la sección anterior se ha descrito la evolución del sólido rígido de forma analítica. Existe otra vía, utilizada por Poincaré, para describir la solución al mismo problema. Esta se basa en el análisis de la evolución de elipsoide de inercia del punto fijo.

Se llamará *polo* al punto  $P$  que se mueva sobre el elipsoide de forma que el vector  $\overrightarrow{OP}$  sea siempre paralelo a la rotación  $\vec{\omega}$ . Se llamará  $m$  al módulo de este vector y  $\delta$  a su recta soporte, siendo  $\vec{u}_\delta$  un vector unitario con la dirección y sentido de  $\overrightarrow{OP}$ .

En primer lugar analizaremos los teoremas a los que obedece el movimiento del elipsoide de inercia del sólido para, a continuación, describir el movimiento del sólido.

**Teorema 1 (I)** *La energía cinética del sólido es directamente proporcional a  $\frac{\omega^2}{m^2}$*

en efecto,

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} I_\delta \omega^2$$

pero

$$I_\delta = \frac{k^2}{OP^2}$$

por lo que

$$\mathcal{E}_c = \frac{k^2}{2} \frac{\omega^2}{m^2}$$

es decir, la evolución de la energía cinética puede observarse siguiendo la variable cinemática  $\vec{\omega}$  y la geométrica  $m$ .

**Teorema 2 (II)** *El momento cinético del sólido es en todo instante perpendicular al plano tangente al elipsoide de inercia por el polo.*

El plano tangente al elipsoide de inercia tiene como vector normal al

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{zx} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \mathbf{I}_O \cdot \vec{u}_\delta = \frac{m}{\omega} \mathbf{I}_O \cdot \vec{\omega} = \frac{m}{\omega} \vec{L}_O$$

por lo que en todo momento, la dirección de  $\vec{L}_O$  es la de la normal al elipsoide por el polo.

**Teorema 3** *La distancia del punto fijo al plano tangente al elipsoide de inercia por el polo es directamente proporcional al cociente entre la raíz cuadrada de la energía cinética y el módulo del momento cinético.*

La distancia de  $O$  al plano tangente es

$$\delta = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = m \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \frac{\vec{L}}{L}$$

pero por el primer teorema

$$\mathcal{E}_c = \frac{k^2}{2} \frac{\omega^2}{m^2}$$

por lo que

$$\delta = \frac{k}{2} \frac{\sqrt{\mathcal{E}_c}}{L}$$

lo que completa la demostración.

Si aplicamos los resultados obtenidos para el movimiento por inercia del sólido a los teoremas de Poinsot, se obtienen unos resultados muy expresivos.

Teniendo en cuenta que la energía cinética y el momento cinético son constantes, de los teoremas (II) y (III) se obtiene que el elipsoide de inercia es siempre tangente a un plano de dirección fija (teorema II) y situado a una distancia constante  $\delta = \frac{k}{\sqrt{I}}$  del punto fijo (III) de lo que se obtiene que

*El elipsoide de inercia del punto fijo de un sólido que se mueve bajo la acción de un sistema de fuerzas de momento nulo respecto al punto fijo rueda y pivota sin deslizar sobre un plano fijo.*

La imagen geométrica que proporciona el modelo de Poinsot permite visualizar la evolución del polo, tanto respecto al sistema fijo como al sistema móvil. Para ello se definen las

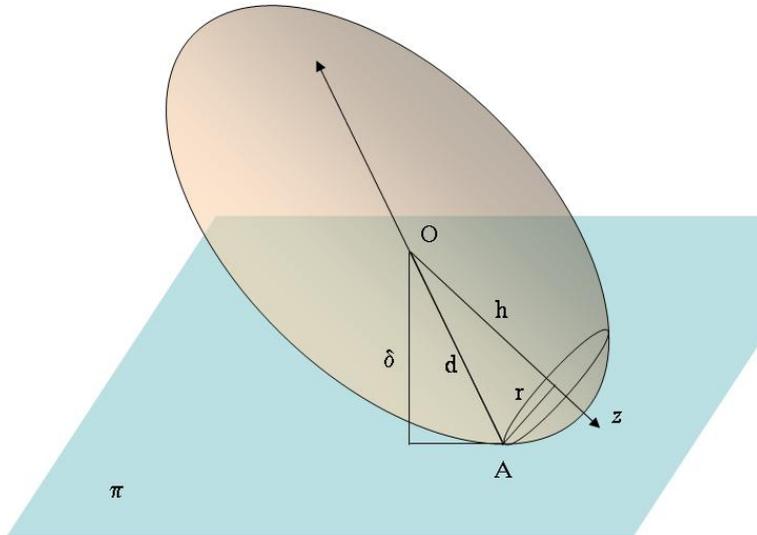


Figura 3: rodadura y pivotamiento sin deslizamiento del elipsoide de inercia de  $O$  respecto al plano fijo

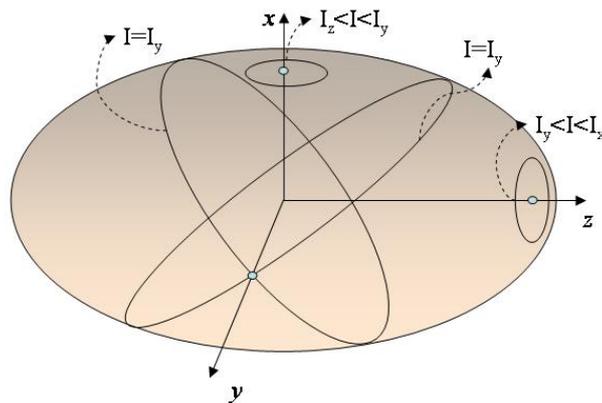


Figura 4: poloides

**Definición 1 (Poloide)** es la curva que describe el polo sobre el elipsoide de inercia

**Definición 2 (herpoloide)** es la curva (plana) que describe el polo respecto al sistema fijo.

La forma de la poloide depende de las condiciones iniciales del movimiento del sólido y, en concreto, de la constante  $I$ . En efecto, la poloide puede determinarse como la intersección de dos superficies. La primera es el elipsoide de inercia y la segunda se obtiene obligando al plano tangente al elipsoide por el polo a estar a una distancia fija  $\delta$  de  $O$ .

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{I_x^2 x^2 + I_y^2 y^2 + I_z^2 z^2}} \Rightarrow I_x^2 x^2 + I_y^2 y^2 + I_z^2 z^2 = \delta^2 = \frac{k^2}{I}$$

eliminando la cuarta homogénea entre esta ecuación y la del elipsoide de inercia

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = k^2 \quad (12)$$

queda

$$I_x(I_x - I)x^2 + I_y(I_y - I)y^2 + I_z(I_z - I)z^2 = 0 \quad (13)$$

ecuación del cono proyectante de la poloide desde  $O$ , el cual permite describir su forma cómodamente. Según los valores de  $I$  puede decirse

A.1.  $I_z < I < I_y$  De [13] se tiene la ecuación de un cono de la forma

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0 \quad \text{con } A, B, C > 0$$

como elíptico que tiene por eje el mayor del elipsoide de inercia y cuya intersección con el mismo son curvas cerradas que *abrazan* dicho eje.

A.2.  $I_y < I < I_x$  De [13] se tiene la ecuación de un cono de la forma

$$Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0 \quad \text{con } A, B, C > 0$$

como elíptico que tiene por eje el menor del elipsoide de inercia y cuya intersección con el mismo son curvas cerradas que *abrazan* dicho eje.

B.1  $I = I_z$  El cono se transforma en

$$Ax^2 + By^2 = 0 \quad \text{con } A, B > 0$$

lo que sólo puede satisfacerse con  $x = y = 0$ , es decir para el eje mayor del elipsoide de inercia. La poloide es por lo tanto un punto que corresponde a un extremo del eje mayor del elipsoide de inercia.

B.2  $I = I_x$  El cono se transforma en

$$-By^2 - Cz^2 = 0 \quad \text{con } B, C > 0$$

lo que sólo puede satisfacerse con  $y = z = 0$ , es decir para el eje menor del elipsoide de inercia. La poloide es por lo tanto un punto que corresponde a un extremo del eje menor del elipsoide de inercia.

B.3  $I = I_y$

La ecuación [13] queda

$$Ax^2 - Bz^2 = 0 \Rightarrow \frac{z}{x} = \pm \sqrt{\frac{A}{C}} \quad \text{con } C, A > 0$$

ecuación de un par de planos que se cortan en el eje intermedio del elipsoide, simétricos respecto a los planos principales del mismo. La poloide es por lo tanto un arco de las elipses que definen la intersección del elipsoide de inercia con el par de planos anteriores.

Cuando la rotación inicial tiene por eje el mayor o el menor de los del elipsoide, es estable, pues las poloides cercanas al eje lo abrazan y si en cualquier momento están próximas al mismo, se mantendrán siempre cerca. Por el contrario, las poloides cercanas al eje intermedio pueden alejarse de éste, por lo que las rotaciones iniciales en torno a este eje son inestables.

Si el elipsoide de inercia es de revolución, entonces las poloides son circunferencias cuyo centro está sobre el eje de revolución y contenidas en planos perpendiculares al mismo. Evidentemente, en este caso sólo son estables las rotaciones alrededor del eje de revolución.